

Top

TEST

Left side

Right side

Bottom

Electrónica

Luis A. Orozco

www.jqi.umd.edu

Lección 4 en el Departamento de Física

Universidad de Concepción

Marzo 2024





<https://www.physics.umd.edu/rgroups/amo/orozco/results/2024/Results24.htm>

Plan:
Componentes
Circuitos
Impedancia

Componentes e Impedancia

Elementos lineales:

La frecuencia de entrada es la misma frecuencia de salida.

Pueden producir ruido.

Pueden depender de parámetros ambientales [T].

Su comportamiento puede ser diferente en diferentes rangos de frecuencia.

Nos interesan los circuitos con corriente alterna.

Para pasar de las ecuaciones diferenciales lineales a la formulación algebraica se puede hacer con transformadas de Fourier. [puede confundirse la corriente con el imaginario]

| Elemento | Dominio temporal | Dominio de frecuencia |
|-----------------|-------------------------|--|
| R | $v = Ri$ | $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$ |
| L | $v = L \frac{di}{dt}$ | $\mathbf{V} = i \omega L \mathbf{I}$ |
| C | $i = C \frac{dv}{dt}$ | $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{i \omega C}$ |

R es la resistencia, L es la inductancia y C la capacitancia

\mathbf{V} , \mathbf{I} son transformadas de Fourier de v , i y pueden ser complejas.

La impedancia:

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R, \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = i\omega L, \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{i\omega C}$$

Relaciones de fase:

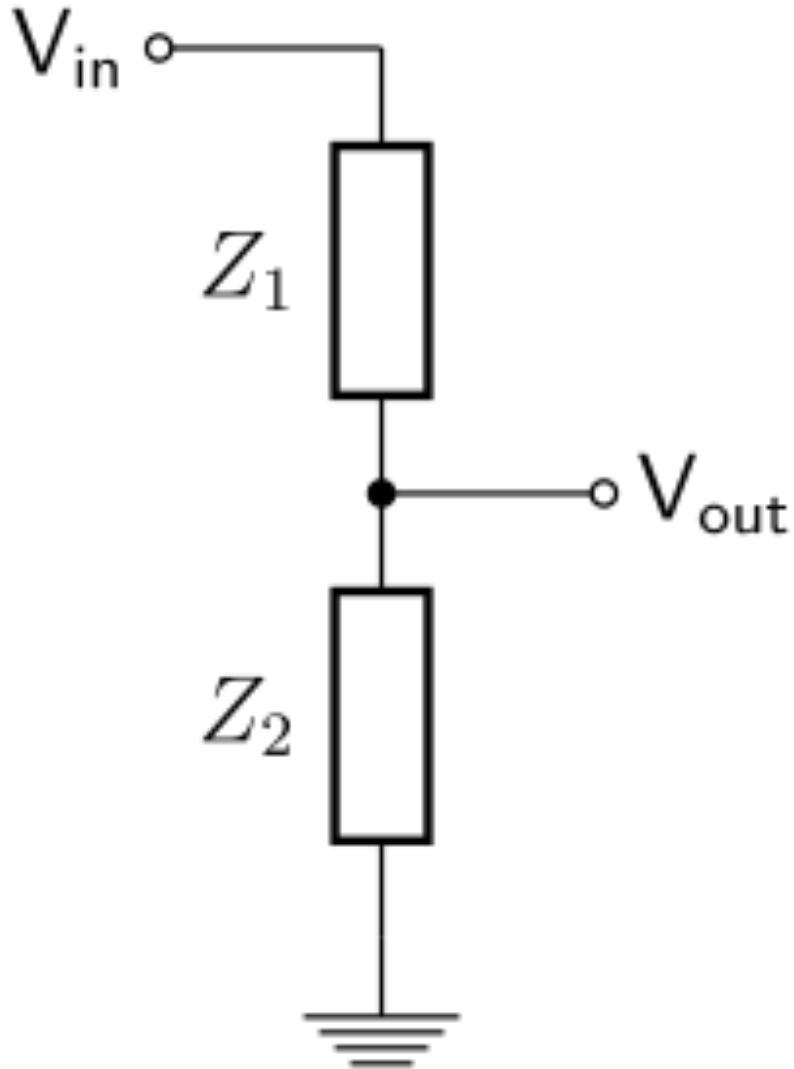
V e **I** están en fase para una resistencia.

V e **I** están desfasadas 90 grados para una inductancia.

V e **I** están desfasadas -90 grados para una capacitancia.

Las leyes de Kirchhoff aplican, pero ahora son complejas

Circuitos simples; el divisor de voltaje



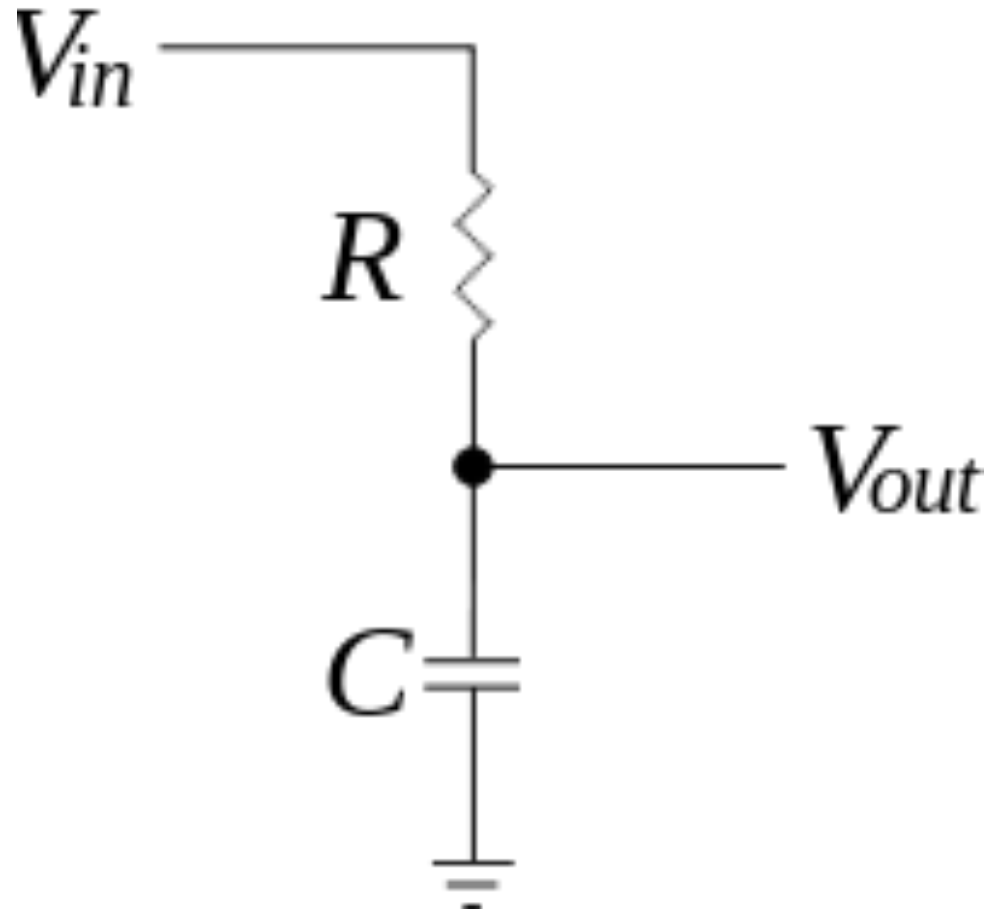
Voltaje de salida:

$$V_{out} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot V_{in}$$

Función de transferencia

$$H = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Filtro pasa bajas:



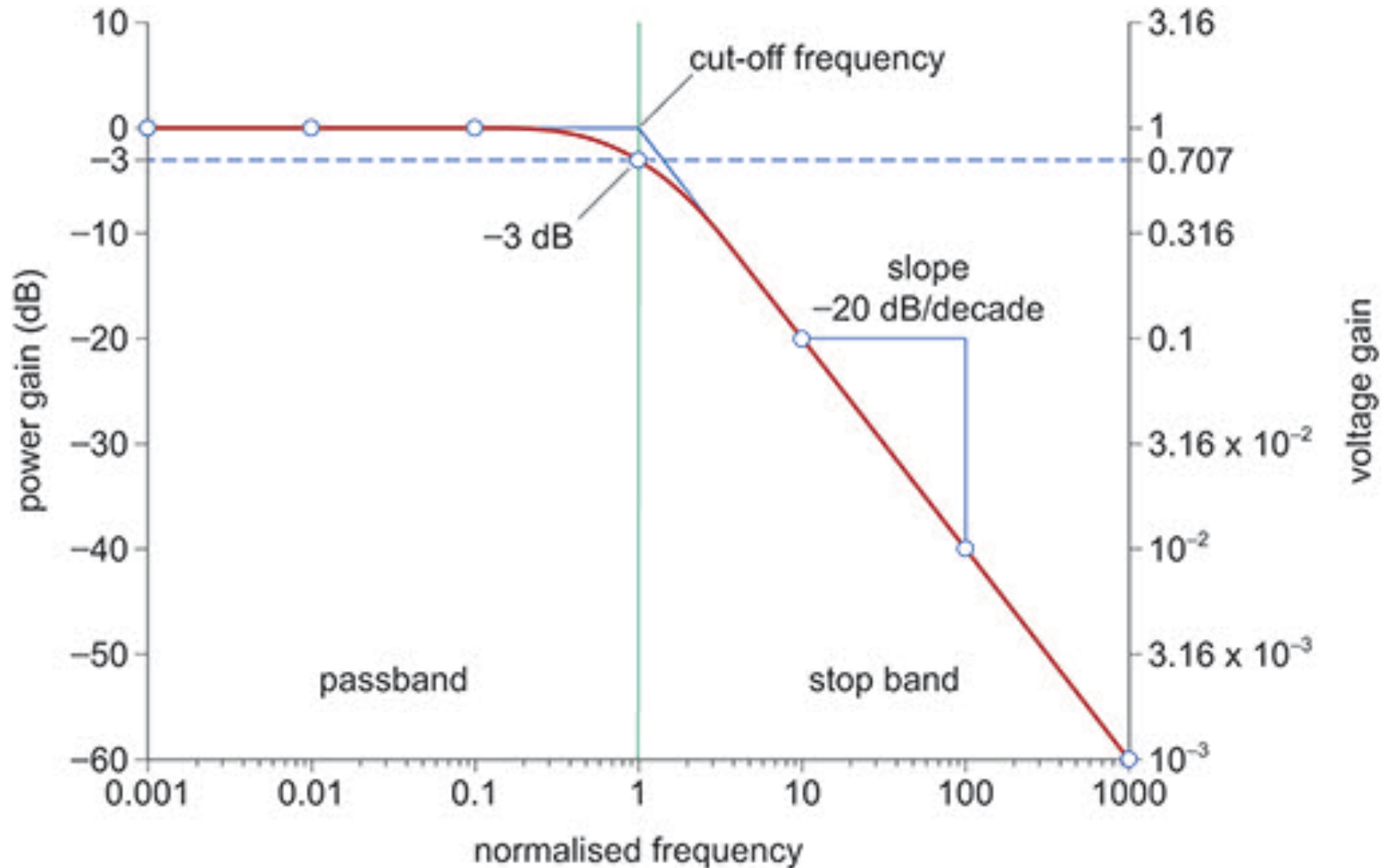
Función de transferencia

$$\frac{1}{1 + i\omega RC}$$

A baja frecuencia $\omega \ll 1/RC$ el voltaje de entrada no se atenúa. Si $\omega \gg 1/RC$ el voltaje se atenúa y adquiere una fase de -90° .

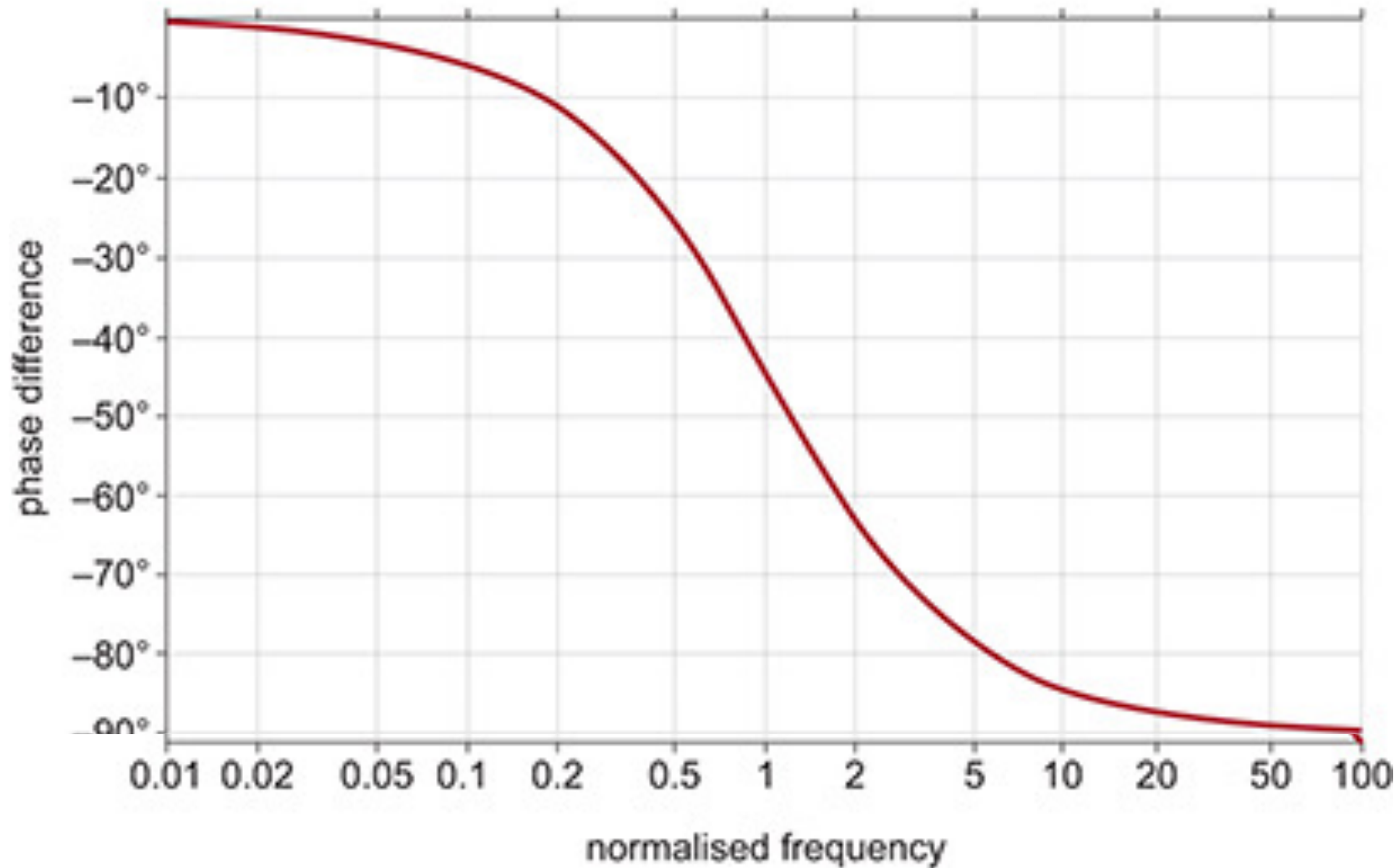
Cuando $\omega = 1/RC$, el voltaje de salida está a -45° del de la entrada y su amplitud se atenúa por un factor de $2^{1/2}$.

Diagrama de Bode del filtro Pasa Bajas: Es una manera gráfica de representar la función de transferencia, tanto la amplitud como la fase.



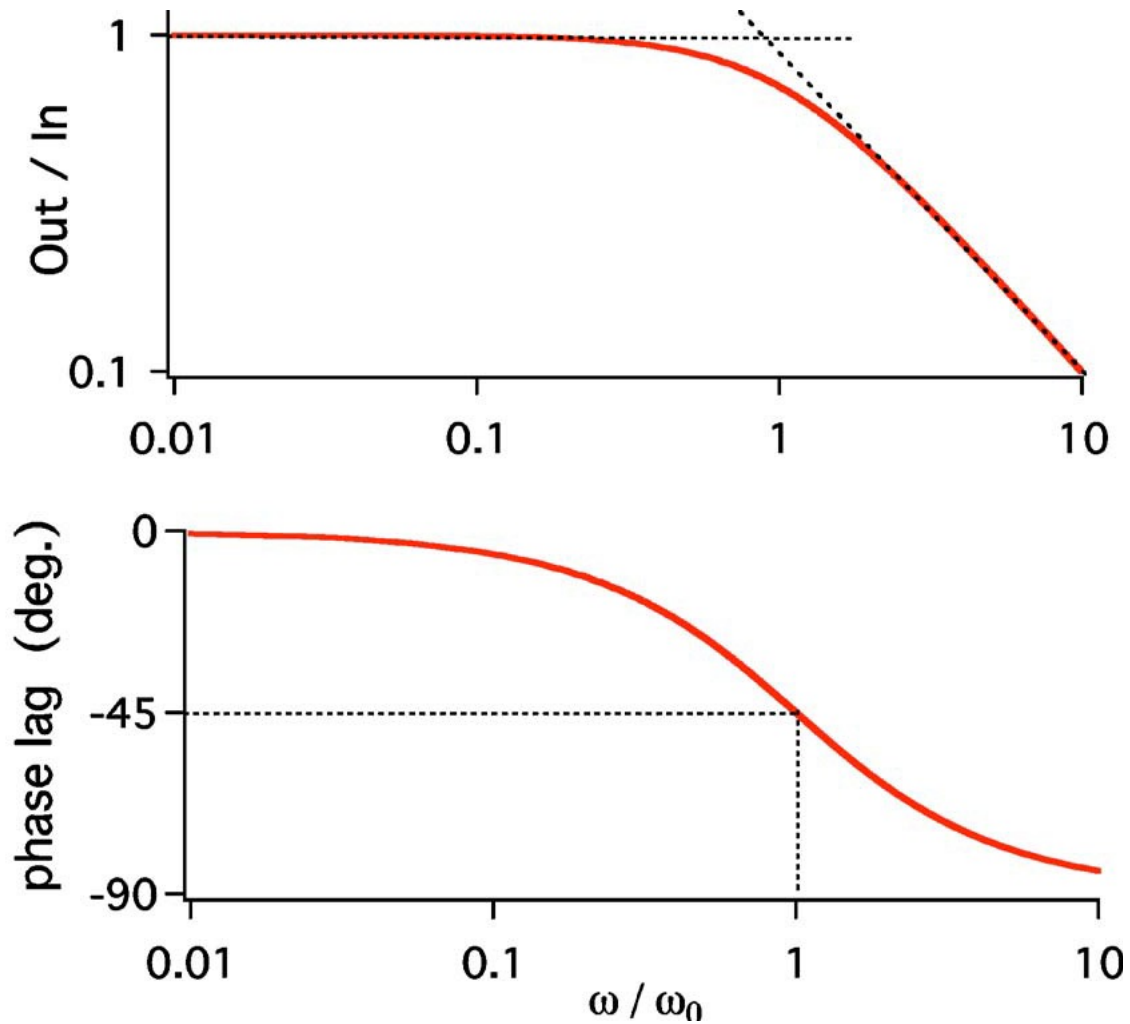
$$\frac{1}{1 + i\omega RC}$$

la fase:

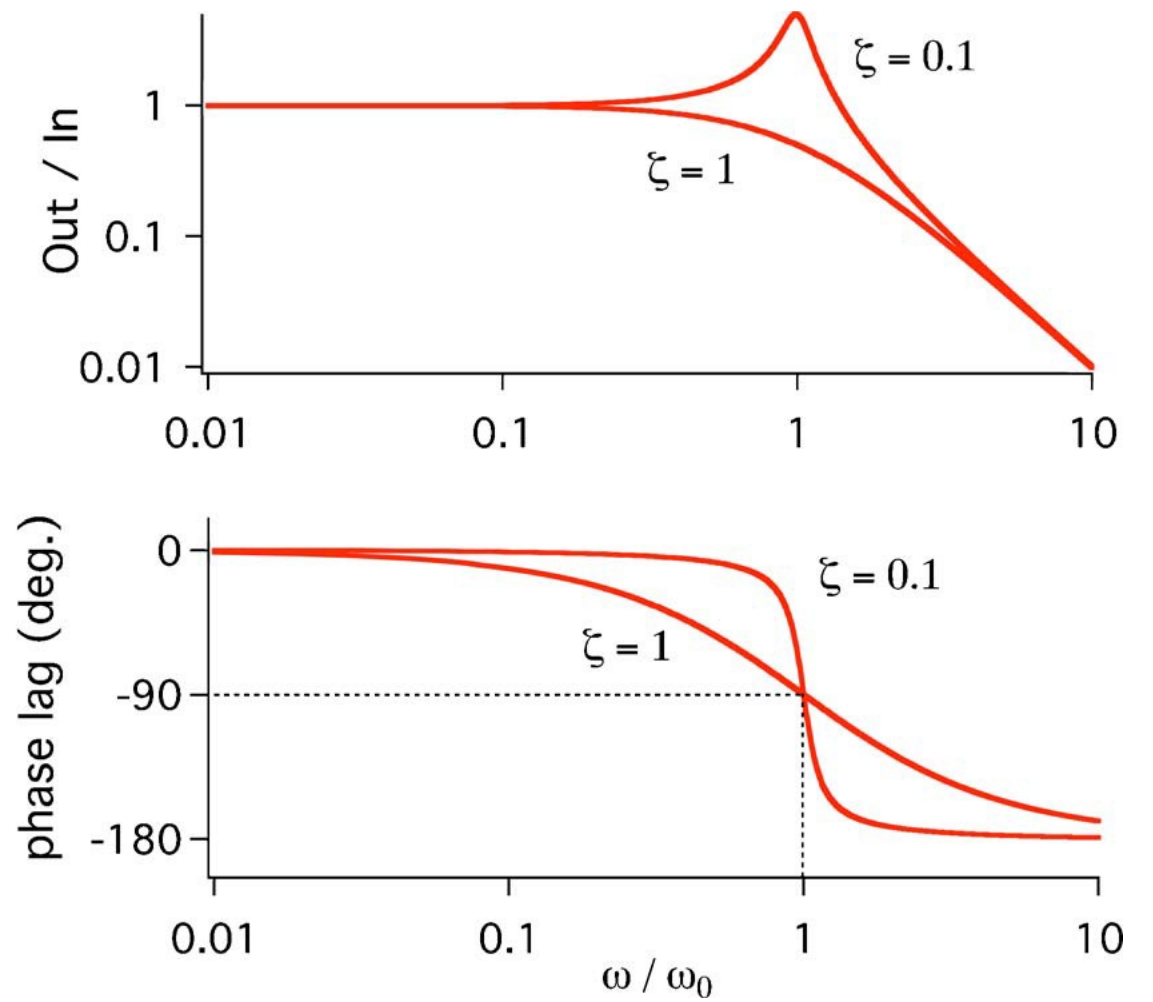


$$\frac{1}{1 + i\omega RC}$$

Comparación de dos filtros:



primer orden

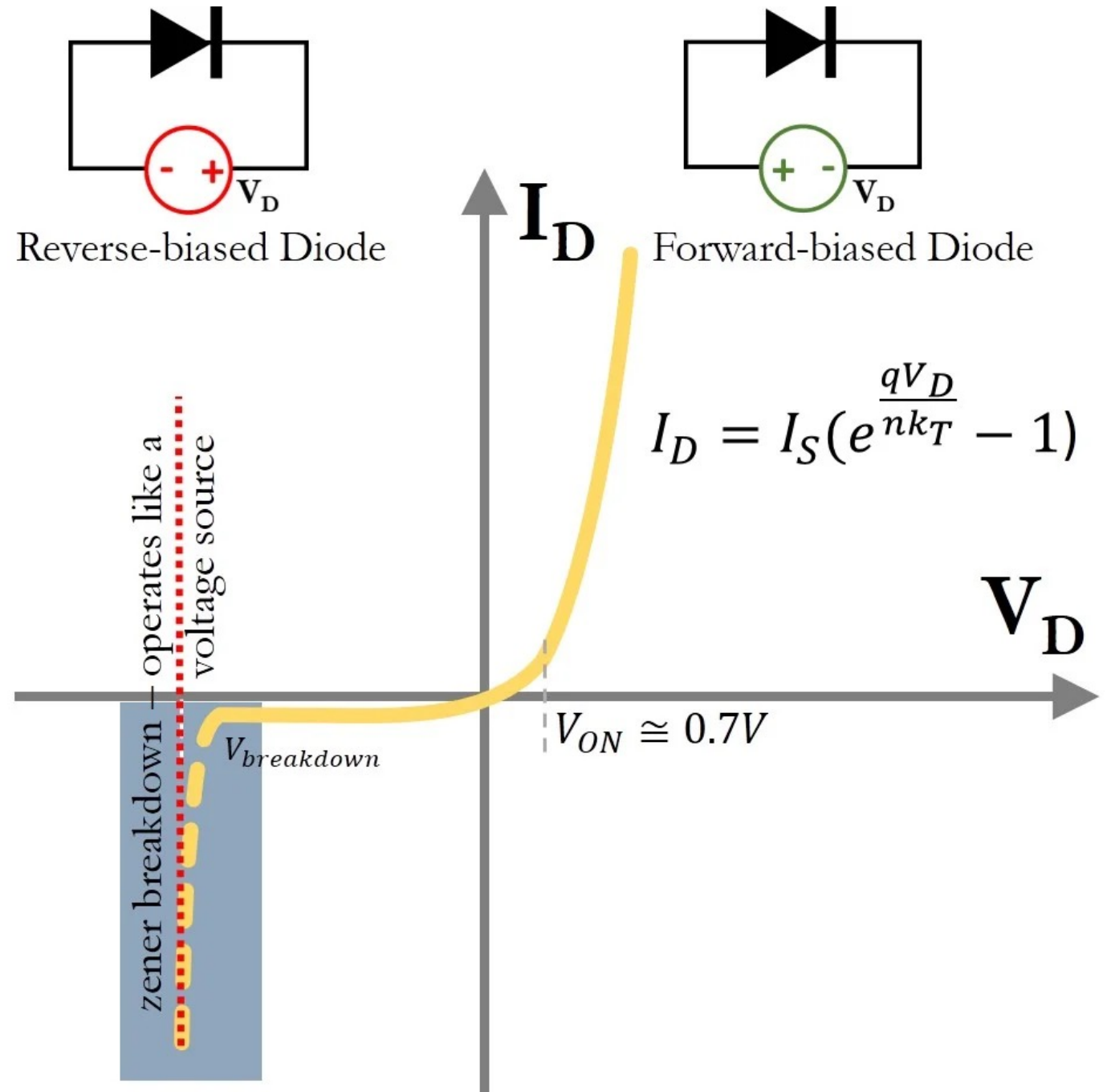


segundo orden

Elemento no lineal, no sigue la ley de Ohm: el diodo, para $V_D > 0$ la respuesta se aproxima a $I_D \sim aV_D + bV_D^2$

Si la frecuencia de entrada es ω , las de salida (en la corriente) son ω y 2ω .

Entrega el cuadrado de el voltaje de entrada, entonces si este es una suma, la salida tendrá el product de los sumandos.



El mezclador de frecuencias (frequency mixer):

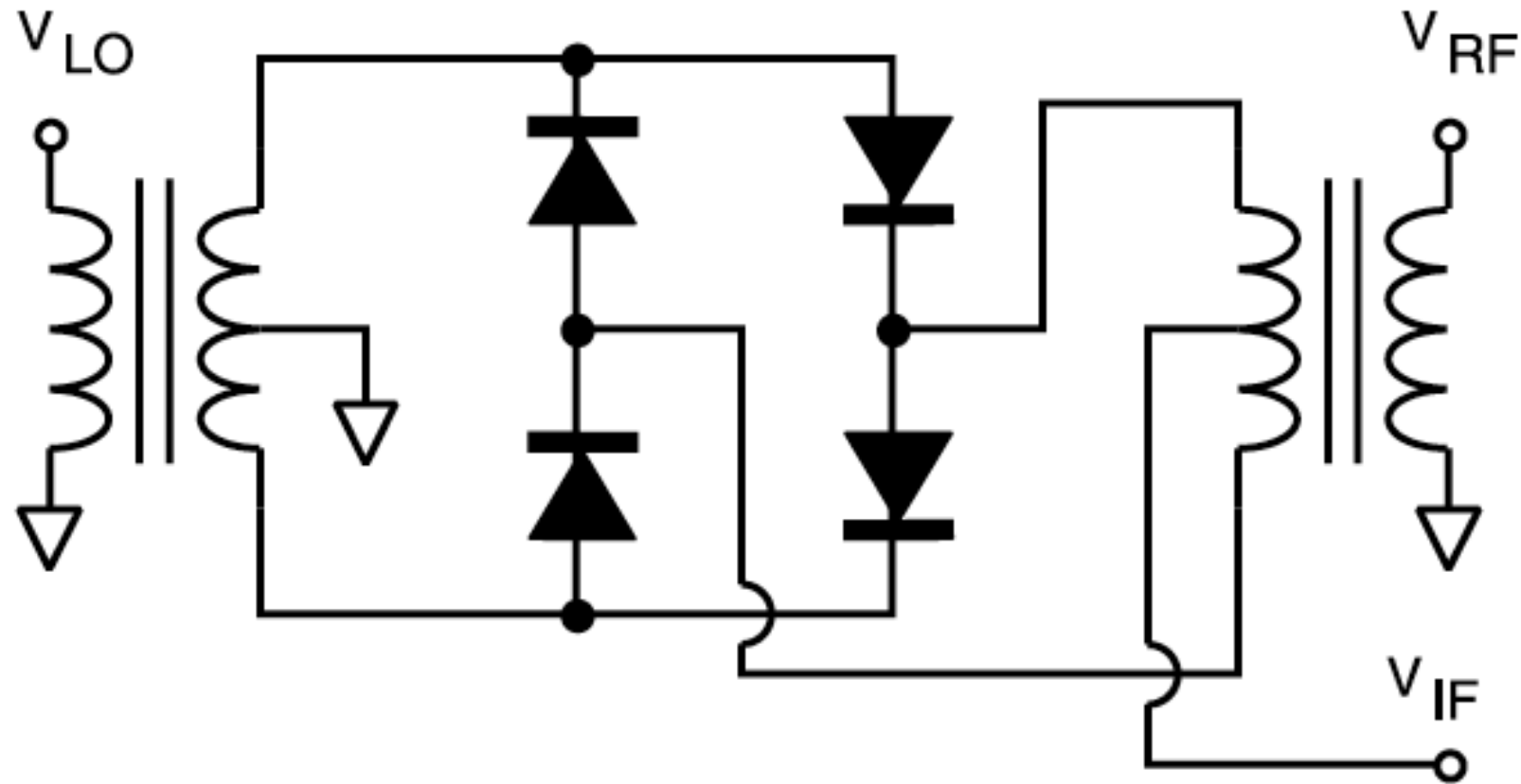


Figure 14.17 Diode bridge doubly balanced mixer.

El mixer multiplica las señales del RF ω_1 (radio frequency) y LO ω_2 (local oscillator)

Las señales son complejas y el resultado que sale por el IF. Ahí las frecuencias de salida serán a la suma ($\omega_1 + \omega_2$) y la resta de las dos ($\omega_1 - \omega_2$). Si son iguales las dos frecuencias entonces la salida será proporcional a la fase entre el voltaje RF y el del LO.

Esto es la base de la detección por radar, del radio, de sus celulares...

En radio si las frecuencias son iguales, la detección se dice homodina y si son diferentes es heterodina.

Pero siempre hay ruido:

En realidad, los diagramas de Bode siempre tienen un piso.

Es necesario siempre entender el ruido

Algo de las matemáticas del ruido.

Si $f(t)$ es un ruido y es real. Es una serie de tiempo, un vector.

Su promedio es cero $\langle f(t) \rangle = 0$

Su varianza no $\langle f^2(t) \rangle \neq 0$ y es positiva

La varianza de f se obtiene con la autocorrelación $C(\tau) = \langle f(t)f(t + \tau) \rangle$ (es el producto interno) a tiempos iguales, $\tau=0$

La covarianza de f y g se obtiene con la correlación cruzada $C(\tau) = \langle f(t)g(t + \tau) \rangle$ a tiempos iguales, $\tau=0$

La transformada de Fourier de $x(t)$ es la densidad espectral, puede ser se la amplitud o del cuadrado (la potencia).

Correlación cruzada (dos funciones) $C(\tau) = \langle f(t)g(t + \tau) \rangle$

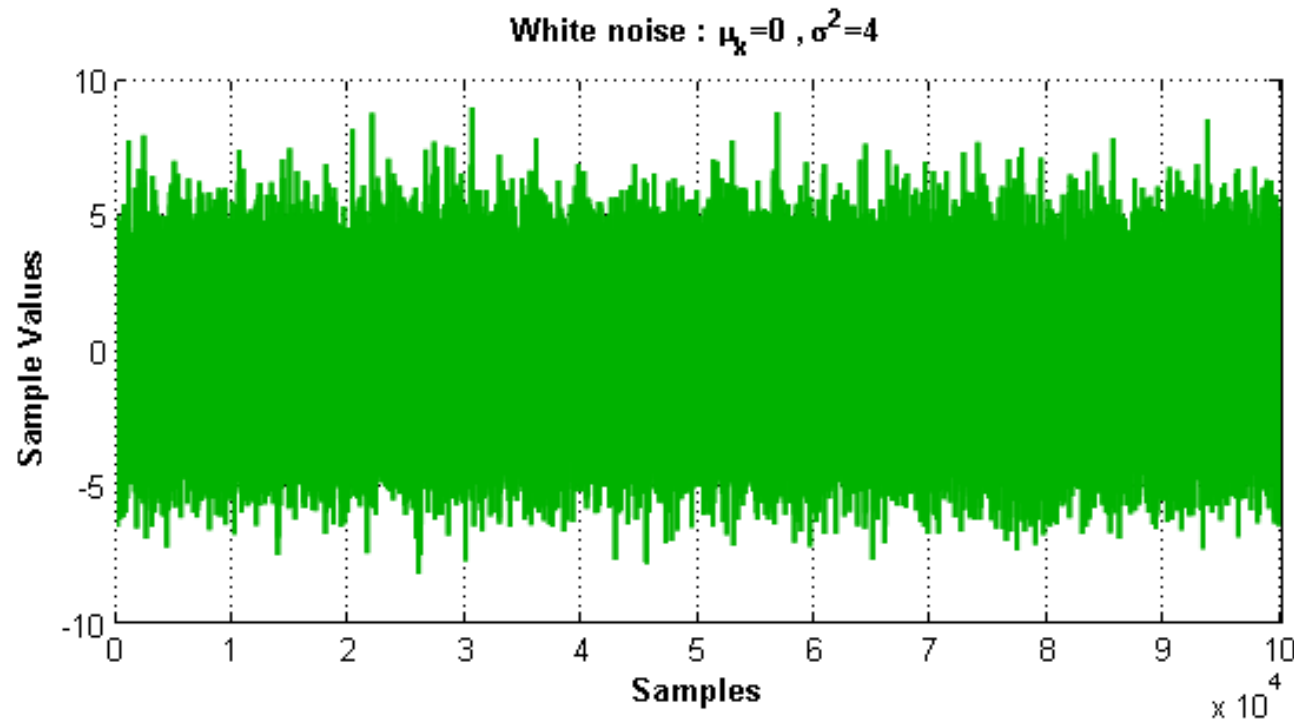
Autocorrelación (la función consigo misma) $C(\tau) = \langle f(t)f(t + \tau) \rangle$

$$C(n) = \langle f(m)g(m + n) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^*[m] g[m + n].$$

$$C(\tau) = \langle f(t)g(t + \tau) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t + \tau) dt,$$

Son definiciones de producto interno

Cuando la señal es ruido, hay problemas formales para encontrar la densidad de potencia espectral, no es una simple transformada de Fourier



Teorema de Wiener–Khinchin-Kolmogorov: la densidad de potencia espectral (PSD) de una función de ruido es la transformada de Fourier de la correlación. (Einstein lo intuyó en 1916).

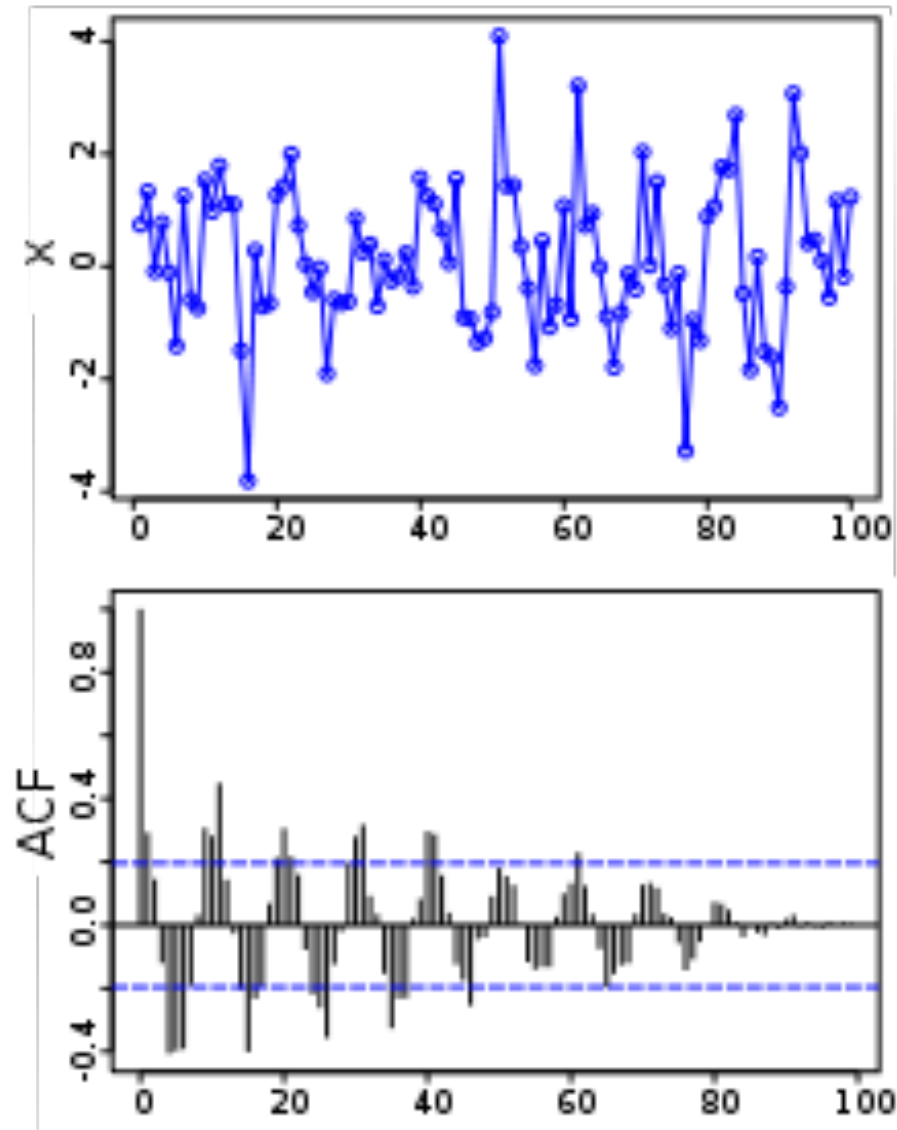
La transformada de Fourier de $f(t)$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}$$

La transformada de Fourier de $|g(\omega)|^2$ da la potencia a la frecuencia ω
PDS, la amplitud es la raíz cuadrada $|g(\omega)|$ ASD

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{2\pi} |g(\omega)|^2 e^{-i\omega t} &= \int \frac{d\omega}{2\pi} g^*(\omega) e^{-i\omega t} \int dt' f(t') e^{i\omega t'} \\ &= \int dt' f(t') \int \frac{d\omega}{2\pi} g^*(\omega) e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} \\ &= \int dt' f(t') \left[\int \frac{d\omega}{2\pi} g(\omega) e^{-i\omega(t'-t)} \right]^* \\ &= \int dt' f(t') f(t' - t)^* \end{aligned}$$

La señal azul tiene una sinusoidal sólo visible en la autocorrelación (negro) también llamada periodograma.



El ruido cuya densidad espectral de potencia (PSD) es constante con la frecuencia es ruido blanco.

Un analizador de espectro cuando no hay señal de entrada, la mayoría de las veces verá que el ruido se eleva a un gran pico en DC. Arriba, por lo general, hay una región de ruido blanco, la banda plana, seguida de un decaimiento en la región de alta frecuencia.

Un poco de motivación.

Si están haciendo una medición de la tasa de decaimiento radioactivo y miden n decaimientos en T s, el error va a ser $n^{1/2}$ en $T^{1/2}$ s. El error fraccional será $n^{1/2}/n = n^{-1/2}$ que tiene unidades de $T^{1/2} = \text{Hz}^{-1/2}$. Si quieren reducir el error por un factor de 10 tienen que tomar datos por un tiempo 100 más largo. El ancho de banda se reduce.

Unidades del ruido:

Potencia de ruido: Watts/Hz

Voltaje de ruido: Volts/Hz^{1/2}

Corriente de ruido: Amp/ Hz^{1/2}

La ordenada (eje y) de la densidad espectral de potencia (PSD) es generalmente W/Hz, mientras que la abscisa (eje x) es Hz

Ruido de Johnson:

Cualquier resistencia genera un voltaje de ruido a través de sus terminales conocido como ruido de Johnson. Su PSD es blanco plano lo que significa que hay la misma potencia de ruido en cada unidad de frecuencia (Hertz). Es el resultado de las colisiones de los electrones con el material de la resistencia.

En circuito abierto el voltaje de ruido generado por una resistencia R [Ω] a la temperatura T [K] viene dada por:

$$v_{noise}(rms) = v_{nR} = \sqrt{4k_B T R B} \quad P_{noise} = \frac{v_{nR}^2(rms)}{R} = 4k_B T B$$

donde v_{noise} es la raíz cuadrada de la varianza, el valor rms, k_B es la constante de Boltzmann y B el ancho de banda [Hz] sobre el que se mide. Su distribución es Gaussiana.

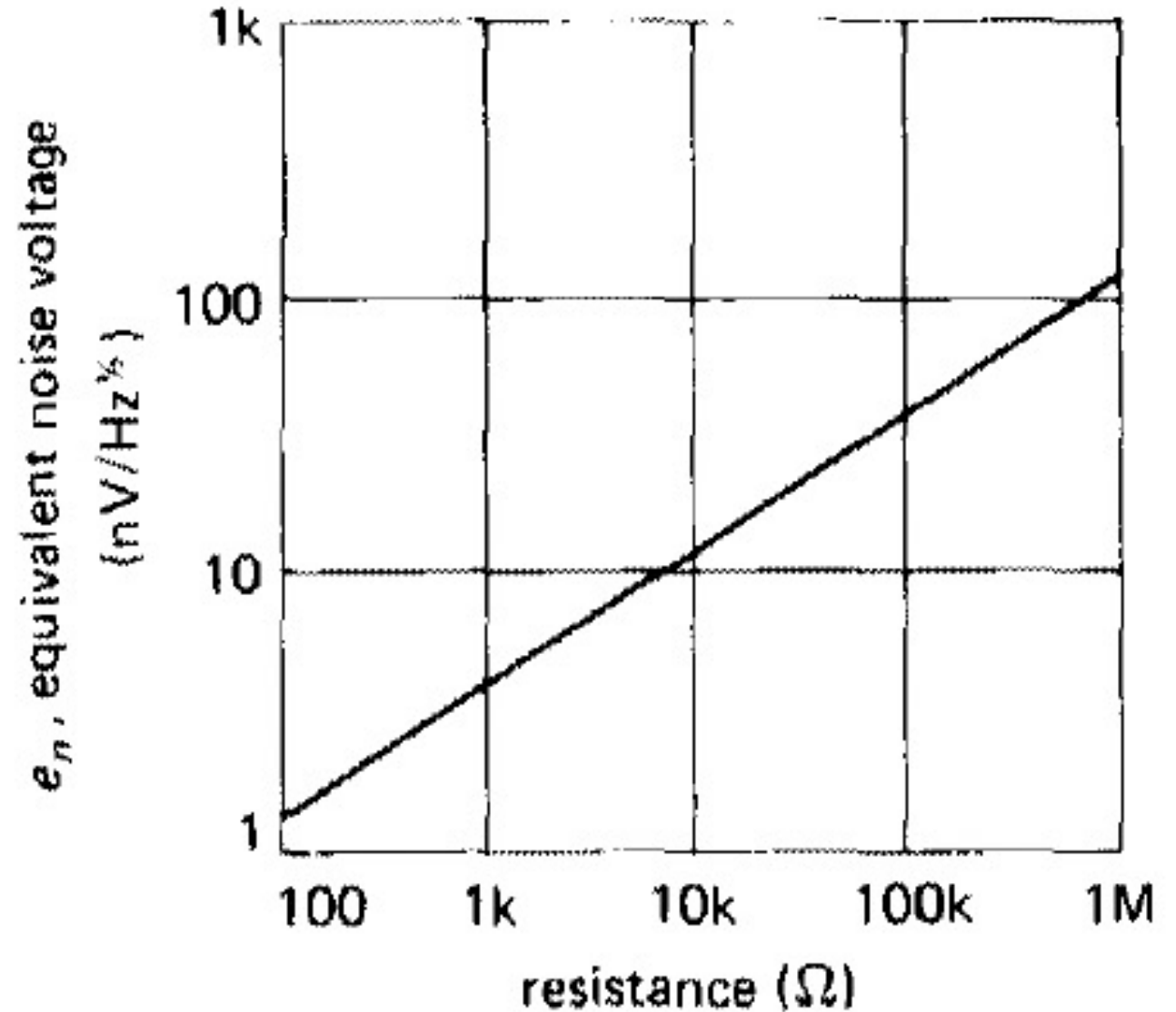
La potencia de ruido depende del ancho de banda B .

Un factor de conversión a recordar:

$$k_B T(300 K) = \frac{1}{40} eV$$

Ruido de Johnson:

La importancia del ruido de Johnson es que establece un límite inferior en el voltaje de ruido en cualquier detector, fuente de señal o amplificador que tenga resistencia. La parte resistiva de una impedancia de una fuente genera ruido de Johnson, al igual que las resistencias de un amplificador.



para $T=300$ K

El análogo de la resistencia (cualquier mecanismo de pérdida de energía en un sistema físico, por ejemplo, fricción viscosa que actúa sobre partículas pequeñas en un líquido) tiene asociadas a sus fluctuaciones en la cantidad física asociada de ruido de Johnson. Este es solo un caso especial del fenómeno de fluctuación-disipación.

Ruido de disparo:

Cualquier proceso donde la energía viaje en forma discreta tiene ruido de disparo (Shotky). Si tenemos una corriente de electrones con habrá ruido. Si tenemos un haz de átomos, cada átomo lleva energía cinética, habrá ruido de disparo. Si consideramos un haz de fotones estos tendrán ruido de disparo. La estadística para una corriente i_{av} [C/s] de electrones con carga e [C] es de Poisson, que el límite de muchas partículas es Gaussiano. La raíz cuadrada de la varianza de la corriente del ruido (rms)

$$i_{noise}(rms) = i_{nR} = \sqrt{2ei_{av}B}, \text{ la amplitud } i_{noise} \text{ sobre un ancho de banda } B \text{ es: } \frac{i_{noise}}{\sqrt{B}} = \sqrt{2ei_{av}}, [\text{Amp/ Hz}^{1/2}]$$

Hay ruidos aditivos y hay multiplicativos:



Suma de ruidos:

Cuando hay dos fuentes de ruido no correlacionados, se suma su potencia, no la amplitud de los voltajes o de las corrientes. Si la resistencia y el ancho de banda es la misma, se pueden sumar los voltajes al cuadrado o las corrientes al cuadrado.

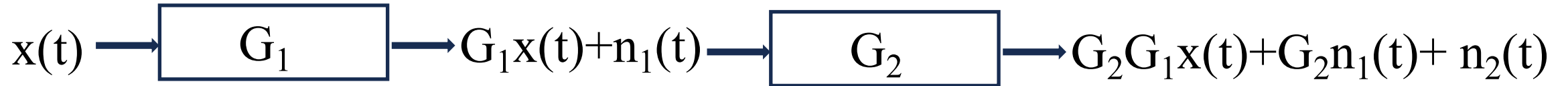
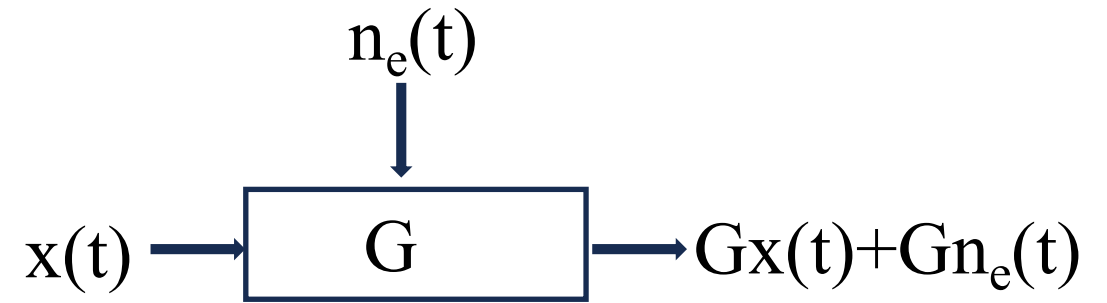
$$v_{noise}(rms) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

si los ruidos f y g son independientes, su covarianza es cero:

$$C(\tau) = \langle f(t)g(t + \tau) \rangle = \langle f(t) \rangle \langle g(t + \tau) \rangle$$

Ruido $1/f^n$:

Los dos componentes principales del primer pico de la PSD cerca de DC son la deriva del DC, que tiene una dependencia característica de $1/f^2$ en su espectro de potencia, y una colección rara de estallidos, chasquidos y explosiones llamada ruido $1/f$ por su dependencia de la frecuencia. (Dado que la dependencia real de la frecuencia a menudo está lejos de $1/f$, también se conoce como ruido de parpadeo o exceso de ruido). La varianza del ruido $1/f$ es independiente del límite superior de frecuencia, y para cualquier cosa más pronunciada, la varianza empeora a medida que disminuye el ancho de banda.



El ruido del primer amplificador va a dominar en una cadena de amplificación, el primero debe de tener las mejores especificaciones de ruido aditivo.

Ejemplo amplificar una señal sinusoidal:

Supongamos que la señal es una onda sinusoidal de 10 nV a 10 kHz. Claramente, se requiere cierta amplificación para llevar la señal por encima del ruido. Un buen amplificador de bajo ruido tendrá unos $5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ de ruido de entrada. Si el ancho de banda del amplificador es de 100 kHz y la ganancia es de 1000, podemos esperar que nuestra salida sea de 10 μV de señal ($10 \text{ nV} \times 1000$) y 1,6 mV de ruido de banda ancha ($5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}} \times \sqrt{100 \text{ kHz}} \times 1000$). No tendremos mucha suerte midiendo la señal de salida a menos que identifiquemos la frecuencia de interés.

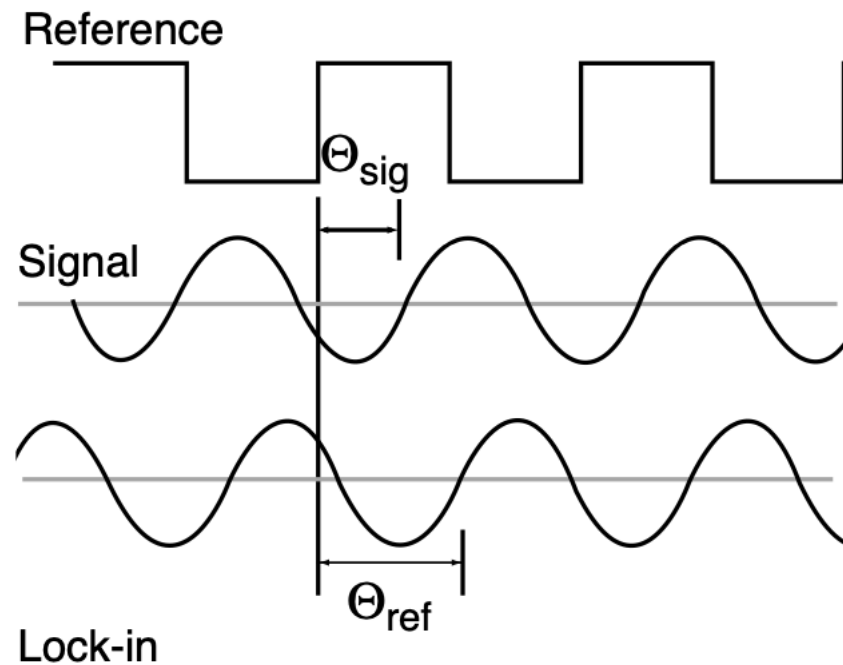
Filtro pasa bandas:

Si después del amplificador ponemos un filtro de pasa-banda con un $Q=100$ (un filtro MUY bueno) centrado a 10 kHz, se detectará cualquier señal en un ancho de banda de 100 Hz ($10 \text{ kHz}/Q$). El ruido en la banda de paso del filtro será de $50 \mu\text{V}$ ($5 \text{ nV} / \sqrt{\text{Hz}} \times \sqrt{100 \text{ Hz}} \times 1000$) y la señal seguirá siendo de $10 \mu\text{V}$. El ruido de salida es mucho mayor que la señal y no se puede realizar una medición precisa. Una mayor ganancia no ayudará al problema de la relación señal-ruido.

Amplificador de Lock-in (Dicke):

Ahora que pasa si después del amplificador ponemos un detector sensible a la fase (PSD por sus siglas en inglés). El PSD puede detectar la señal a 10 kHz con un ancho de banda tan estrecho como 0.01 Hz. En este caso, el ruido en el ancho de banda de detección será de $0,5 \mu\text{V}$ ($5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}} \times \sqrt{0,01 \text{ Hz}} \times 1000$), mientras que la señal sigue siendo de $10 \mu\text{V}$. La relación señal-ruido es ahora de 20 y es posible medir con precisión la señal.

Las mediciones de lock-in requieren una referencia de frecuencia. Normalmente, un experimento se excita a una frecuencia fija (desde un oscilador o generador de funciones) y el lock-in detecta la respuesta del experimento a la frecuencia de referencia.



La señal de referencia es una onda cuadrada a la frecuencia ω_r . Si se utiliza la salida sinusoidal del generador de funciones para excitar el experimento, la respuesta podría ser la forma de onda de la señal que se muestra a continuación. La señal es $V_{sig} \sin(\omega_r t + \theta_{sig})$ donde V_{sig} es la amplitud de la señal, ω_r es la frecuencia de la señal y θ_{sig} es la fase de la señal.

Los amplificadores de lock-in generan su propia señal de referencia interna, generalmente mediante un PLL (Phase lock loop) a la referencia externa. En el diagrama, se muestran la referencia externa, la referencia del bloqueo y la señal. La referencia interna es $V_L \sin(\omega_L t + \theta_{ref})$.

El lock in amplifica la señal y luego la multiplica por la referencia de bloqueo utilizando un detector o multiplicador sensible a la fase. La salida del PSD es simplemente el producto de dos ondas sinusoidales.

$$\begin{aligned}
 V_{\text{psd}} &= V_{\text{sig}} V_L \sin(\omega_r t + \theta_{\text{sig}}) \sin(\omega_L t + \theta_{\text{ref}}) \\
 &= 1/2 V_{\text{sig}} V_L \cos([\omega_r - \omega_L]t + \theta_{\text{sig}} - \theta_{\text{ref}}) - 1/2 V_{\text{sig}} V_L \cos([\omega_r + \omega_L]t + \theta_{\text{sig}} + \theta_{\text{ref}})
 \end{aligned}$$

La salida PSD son dos señales de AC, una a la frecuencia de diferencia ($\omega_r - \omega_L$) y la otra a la frecuencia de suma ($\omega_r + \omega_L$).

Si la salida PSD pasa a través de un filtro de pasa bajas (integrador), se eliminan las señales de AC. ¿Qué quedará? En el caso general, nada. Sin embargo, si ω_r es igual a ω_L , el componente de diferencia de frecuencia será una señal de CC. En este caso, la salida PSD filtrada será:

$$V_{\text{psd}} = 1/2 V_{\text{sig}} V_L \cos(\theta_{\text{sig}} - \theta_{\text{ref}})$$

Esta es una señal muy bonita, es una señal de CC proporcional a la amplitud de la señal y proporcional al coseno de la diferencia de la fase.

Uso de funciones ortogonales.

$$SNR = S/N$$

$$S(t) = \sum_i F_n(n\omega t) S_i$$

$$N(t) = \sum_n F_n(n\omega t) N_i$$

Si codificamos la señal en una de esas funciones, por ejemplo, un seno a frecuencia ω . Entonces al calcular el producto interno de la señal y el ruido en un tiempo T con la función donde codificamos obtenemos (asumiendo fases iguales):

$$S(t) = \frac{1}{T} \int_0^{M\tau+\epsilon} \sum_n F_n(n\omega t) A S_n F_1(\omega t) = \frac{M}{2T} S_1 + \epsilon M$$

Pero el ruido está en todas las frecuencias, por lo que solo esa parte contribuye, pero como es aleatorio. Entonces al calcular el producto interno de la señal y el ruido en un tiempo T con la función donde codificamos obtenemos:

$$N(t) = \frac{1}{2T} \int_0^{M\tau+\epsilon} \sum_{m,n} F_n(n\omega t) A N_n F_m(m\omega t) = \frac{1}{2\tau} \sqrt{N_0} + \epsilon$$

Solo contribuye la parte del ruido que está a esa frecuencia, pero como la PSD es blanca, podemos asumir que N(t) plana y por lo tanto N₀ está dada por D, la potencia en la densidad de ruido

$$SNR = S_0 / N = S_0 \sqrt{T} / \sqrt{D}$$

Noten como la raíz cuadrada de Hertz se cancela con la raíz cuadrada de los segundos.

La correlación como filtro

Un filtro para datos.

El vector filtro simple es todo 0 y solo k elementos 1.

Alineando los dos vectores en un extremo $i=j=0$ a $i=n$ y $j=n$ obteniendo C_0

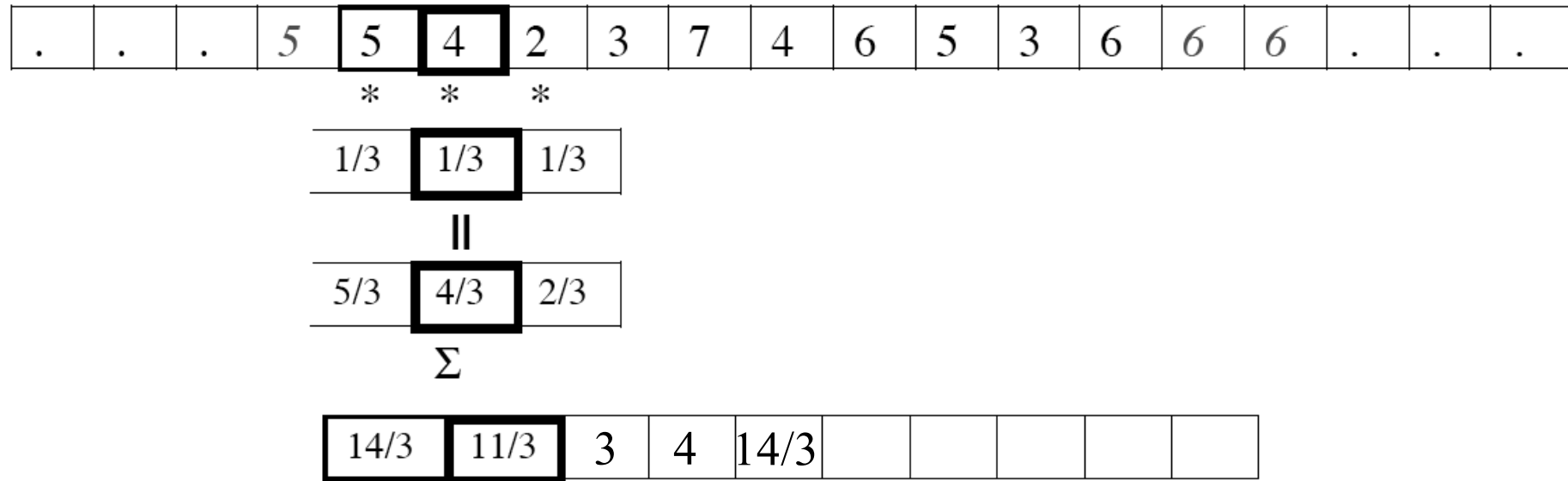
Mueva el vector de filtro sobre los datos en un $i=0$ $j=1$ a $i = n$ y $j = n + 1$ asignando eso a C_1 , continúe el proceso hasta llegar a C_m
 C_m será la señal suavizada por un promedio de k eventos.
Es ampliamente utilizado en el procesamiento de imágenes.

Considere una imagen 1D como un vector de números

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 2 | 3 | 7 | 4 | 6 | 5 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Haz un promedio con los vecinos, cuidado con los extremos.
Por ejemplo, para el cuarto píxel con valor 3 lo reemplazamos con el valor $(2 + 3 + 7) / 3 = 4$; Para el tercer píxel reemplazamos el valor 2 con $(4+2+3)/3=3$

El siguiente valor es:



Tenemos un filtro muy sencillo, pero se pueden definir otros más sofisticados incluso derivadas e integrales.

Patrón a encontrar (ignorando los extremos)

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 7 | 5 |
|---|---|---|

Series

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 8 | 4 | 0 | 3 | 8 | 0 | 7 | 7 | 7 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Correlación normalizada

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|-----|-----|------|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|-----|-----|------|
| .946 | .877 | .934 | .73 | .81 | .989 | .64 | .59 | .78 | .835 | .61 | .931 | .95 | .83 | .57 | .988 |
|------|------|------|-----|-----|------|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|-----|-----|------|

Hay formas mucho más sofisticadas, como en LIGO y VIRGO, pero en principio son similares. No usan correlaciones, sino lo hacen en el espacio de Fourier, porque existe el algoritmo rápido digital (Transformada Rápida de Fourier FFT) que requiere muchas menos operaciones que una correlación.

Otro filtro para datos.

Si conoce la forma de la señal: tome el vector de datos x_j con longitud m y calcular el producto interno con el vector de la señal s_i de longitud n , con $n < m$

Comience alineando los dos vectores en un extremo $i=j=0$ a $i=n$ y $j=n$ obteniendo C_0

Luego mueva el vector de señal sobre el de datos uno $i=0$ $j=1$ to $i=n$ y $j=n+1$ asignando eso a C_1 , Continúe el proceso hasta llegar a C_m
 C_m tendrá un valor máximo cuando el patrón de señal y los datos coincidan, el ruido se promediará a cero.

- Las correlaciones pueden ser en el tiempo, en el espacio, en el ángulo, en píxeles, ...
- La correlación puede ser auto (la función consigo misma) o cruzada (dos funciones).
- Puede ser entre más de dos vectores.
- Es una herramienta única para estudiar y caracterizar ruido.

Métodos de Lock-in (Dicke)

Referencias:

Paul Horowitz and Winfield Hill, *The Art of Electronics*, Cambridge University Press.

Philip C. D. Hobbs, *Building Electro-Optical Systems: Making it All Work*. John Wiley & Sons, Inc.

Gracias

