

Matrices ABCD, Difracción, Polarización y Aberraciones: un repaso de Óptica.

Luis A. Orozco

www.jqi.umd.edu

Lección 3 en el Instituto de Física UNAM
Enero-Febrero 2024





<https://www.physics.umd.edu/rgroups/amo/orozco/results/2024/Results24.htm>

Plan:

Matrices ABCD

Estabilidad

Polarización

Difracción

Aberraciones

Introducción

El campo electromagnético se propaga por ondas. Estas satisfacen la ecuación de onda.

La onda está caracterizada por una amplitud y una fase.

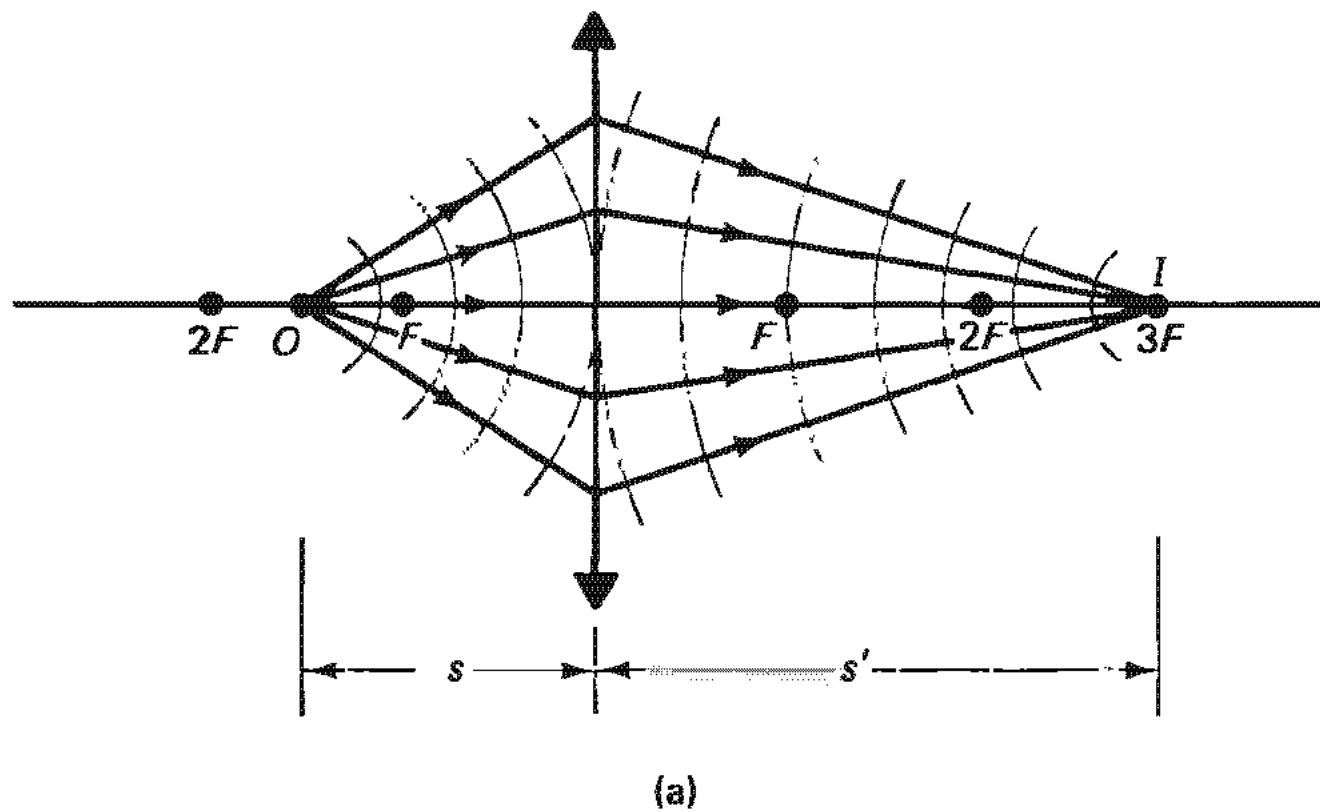
En óptica pensamos en rayos ($\lambda \ll d$) donde d es una distancia característica del sistema.

Estos son líneas perpendiculares a los frentes de onda, superficies con la misma fase.

Los rayos no toman en cuenta la fase de la onda, ni la difracción.

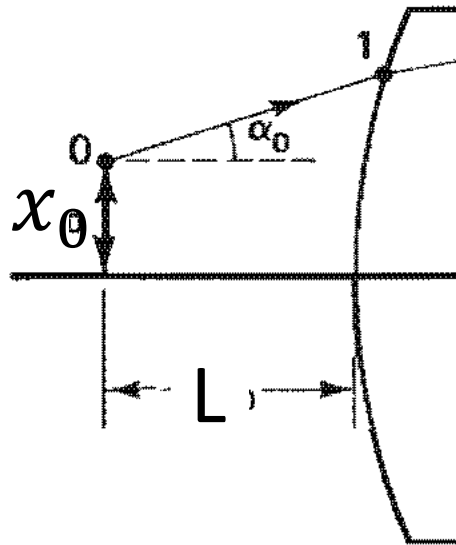
Se puede utilizar la idea de rayos en un gran rango de frecuencias: micro-ondas a rayos X

Cambio en la curvatura de un haz debido a una lente delgada.



El rayo se caracteriza por un vector:
La distancia respecto al eje óptico y el ángulo, la pendiente
respecto al mismo eje óptico

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Matrices ABCD

Óptica Paraxial:

Los ángulos θ de los rayos respecto al eje óptico del sistema son pequeños.

$$\text{sen } \alpha = \alpha \quad ; \quad \text{tan } \alpha = \alpha$$

El análisis de matriz de transferencia de rayos (también conocido como análisis de matriz ABCD) es una forma matemática para realizar cálculos de trazado de rayos en problemas suficientemente simples que se pueden resolver considerando solo rayos paraxiales.

Cada elemento óptico (superficie, interfaz, espejo o recorrido del haz) se describe mediante una matriz de transferencia de rayos 2×2 que opera sobre un vector que describe un rayo de luz entrante para calcular el rayo saliente. Por lo tanto, la multiplicación de las matrices sucesivas produce una matriz de transferencia de rayos concisa que describe todo el sistema óptico. La misma matemática se utiliza en la física de aceleradores: álgebra lineal y geometría simpléctica.

En la aproximación paraxial un ángulo α pequeño implica además que la extensión transversal de los haces de rayos (tanto en x como en y) es pequeña en comparación con la longitud del sistema óptico.

Dado que un sistema de imágenes bueno, deben enfocar todos los rayos paraxiales correctamente. Este método matricial describe adecuadamente las posiciones de los planos focales y los aumentos, sin embargo, las aberraciones deben evaluarse mediante técnicas completas de trazado de rayos, sin hacer la aproximación paraxial.

Matriz de traslacion:

Las ecuaciones para (x, α) en espacio libre son:

$$x_1 = x_0 + L \tan \alpha_0$$

$$\alpha_1 = \alpha_0$$

Con la aproximación paraxial son:

$$x_1 = (1)x_0 + (L)\alpha_0$$

$$\alpha_1 = (0)x_0 + (1)\alpha_0$$

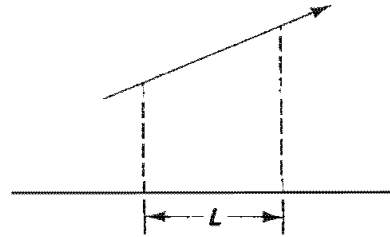
De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos de matrices para varios elementos ópticos.

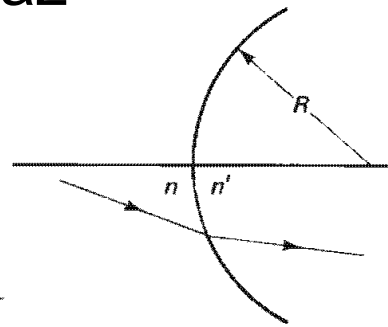
traslación

$$M = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



refracción en interfaz esférica

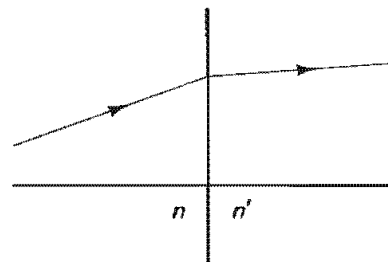
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n'}{Rn'} & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$$



(+R) : convex
(-R) : concave

refracción en interfaz plana

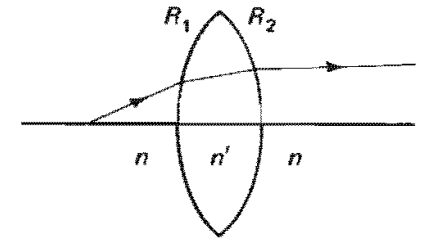
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$$



lente delgada

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

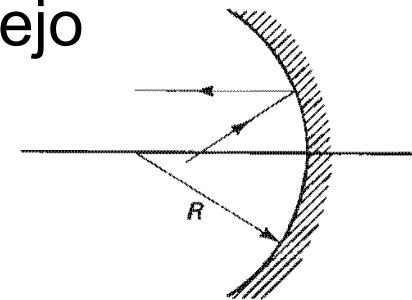
$$\frac{1}{f} = \frac{n' - n}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



(+f) : convex
(-f) : concave

reflección en espejo curvo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$$



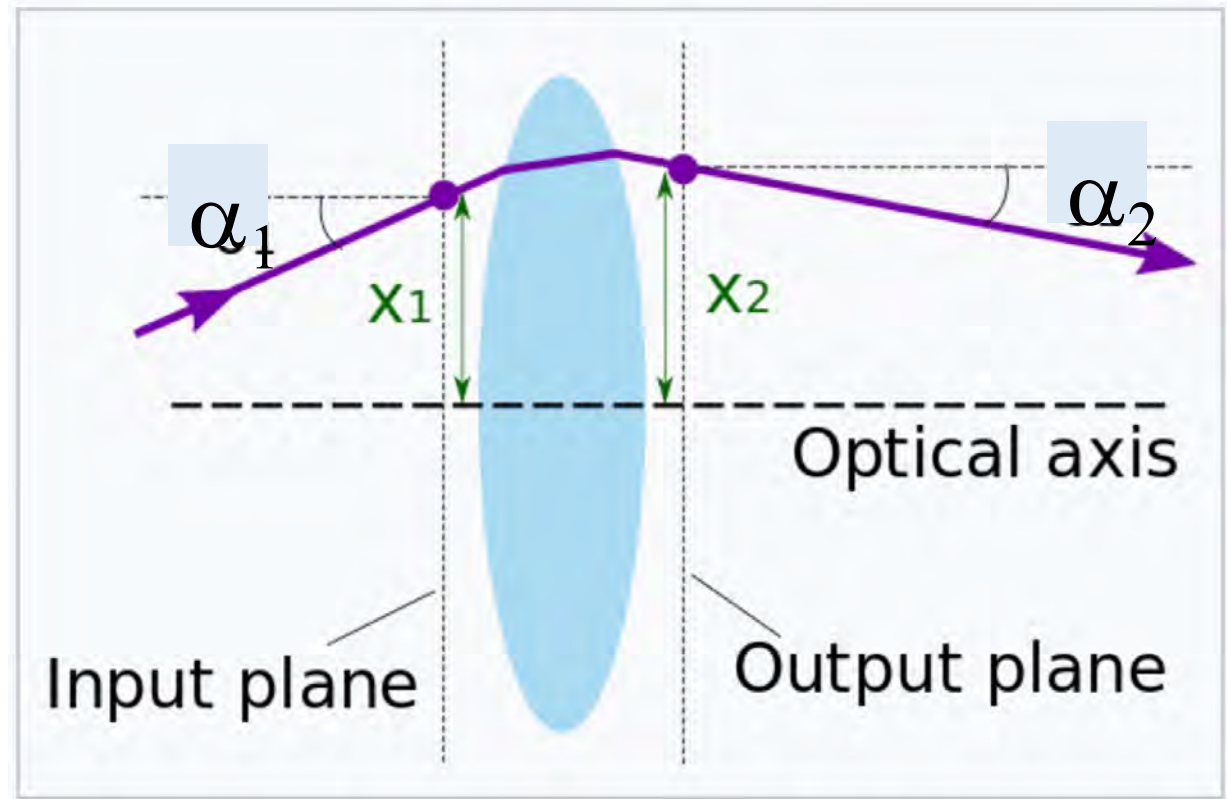
(+R) : convex
(-R) : concave

La matriz ABCD de un sistema óptico complejo, se obtiene multiplicando de manera sucesiva las n matrices, el subíndice indica lo que le pasa al rayo conforme va avanzando de 1 a n , del inicial (i) al final (f). Mucho cuidado con el orden de las matrices.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_f \\ \alpha_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}$$

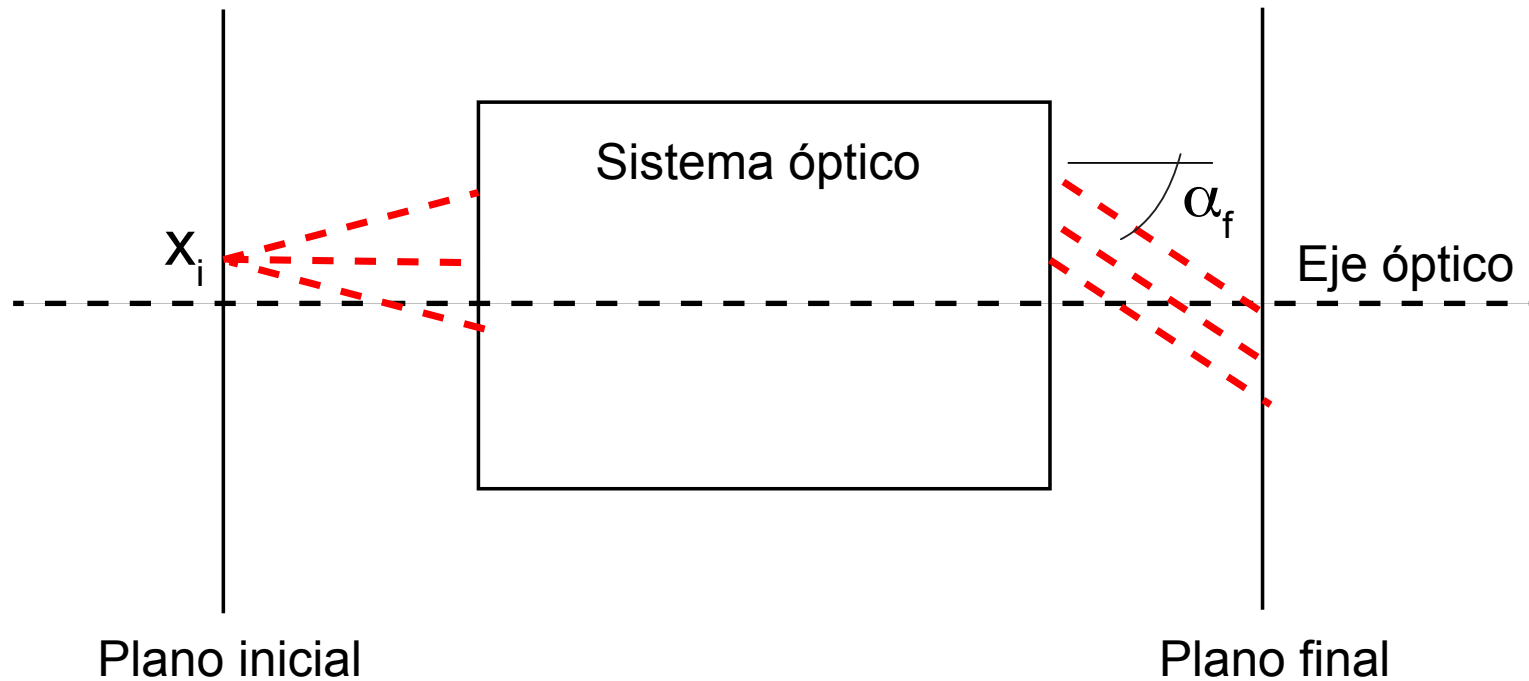
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$



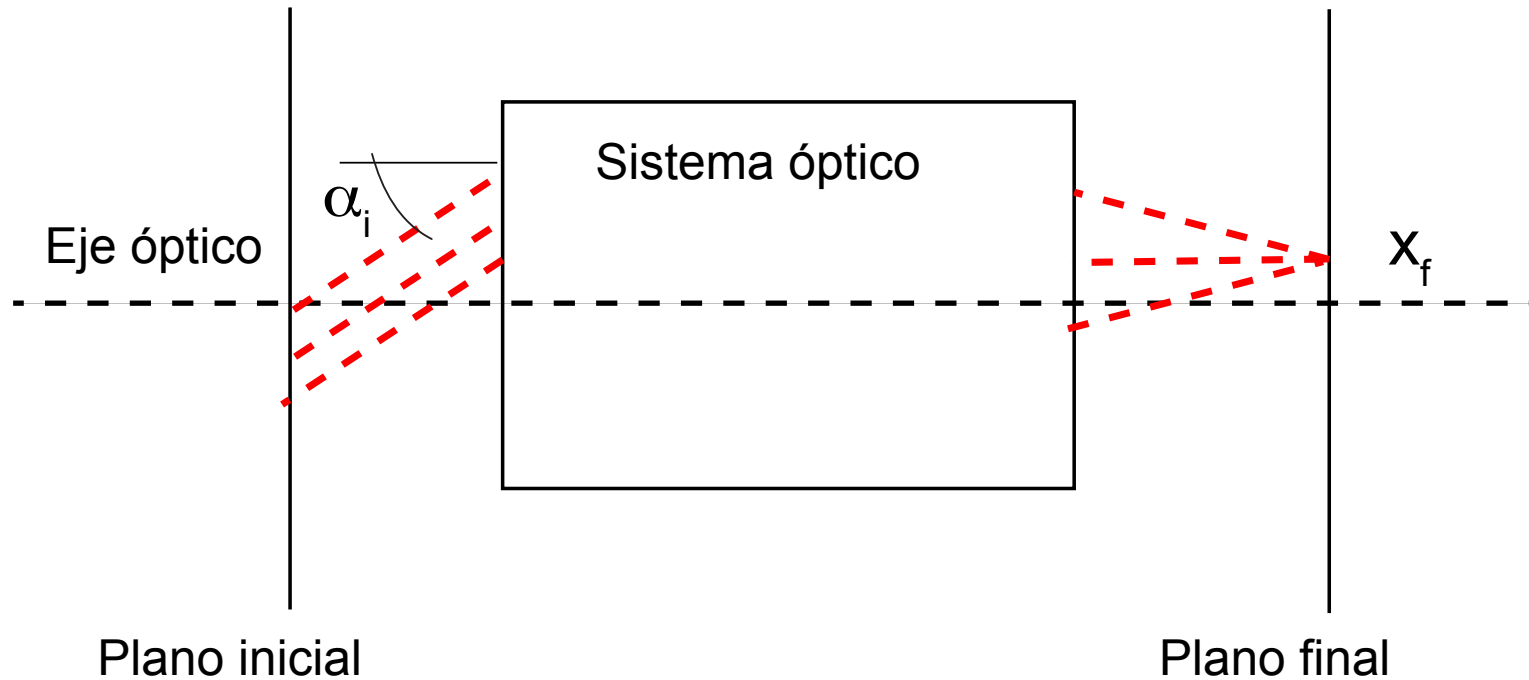
$$A = \left. \frac{x_2}{x_1} \right|_{\alpha_1=0} \quad B = \left. \frac{x_2}{\alpha_1} \right|_{x_1=0} \quad C = \left. \frac{\alpha_2}{x_1} \right|_{\alpha_1=0} \quad D = \left. \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right|_{x_1=0}$$

Estos números nos pueden dar cuál es la magnificación espacial A como angular D.

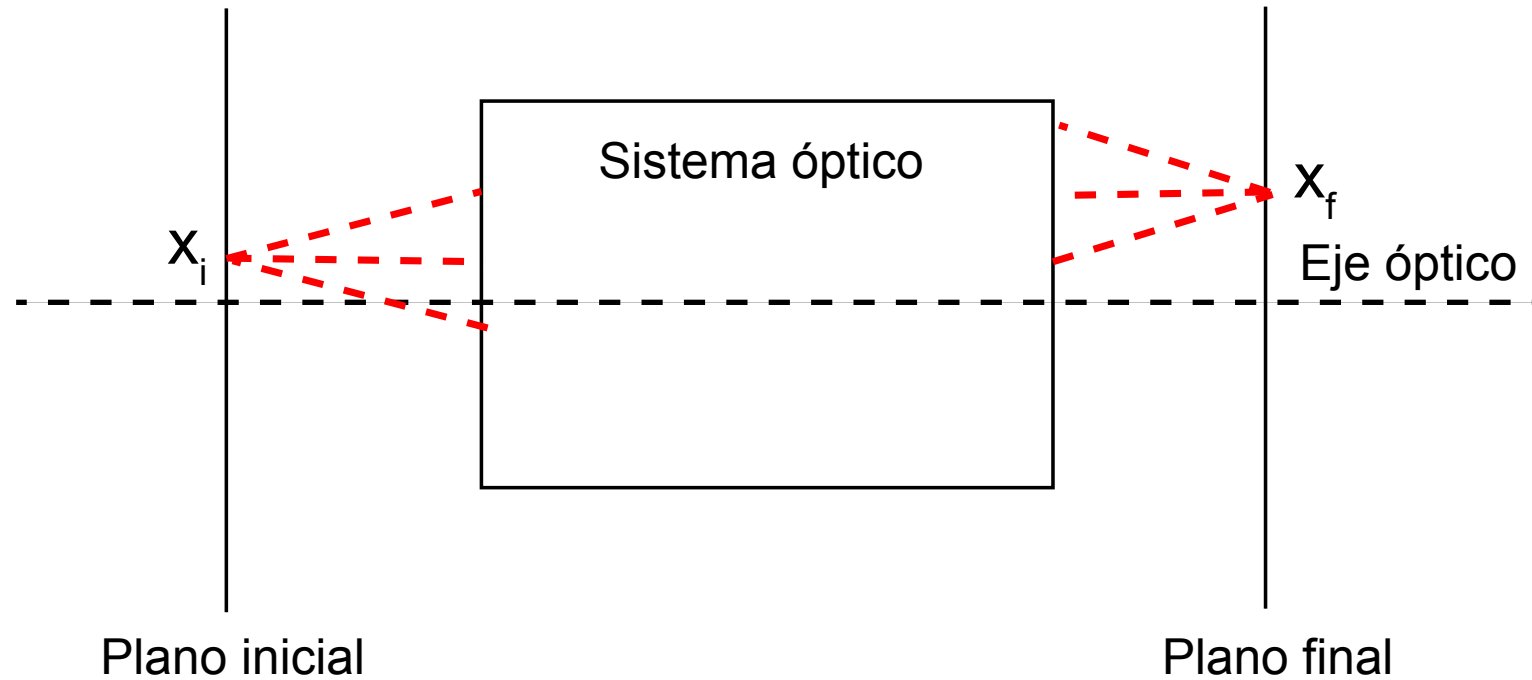
Si $D=0$, el plano inicial es el primer plano focal



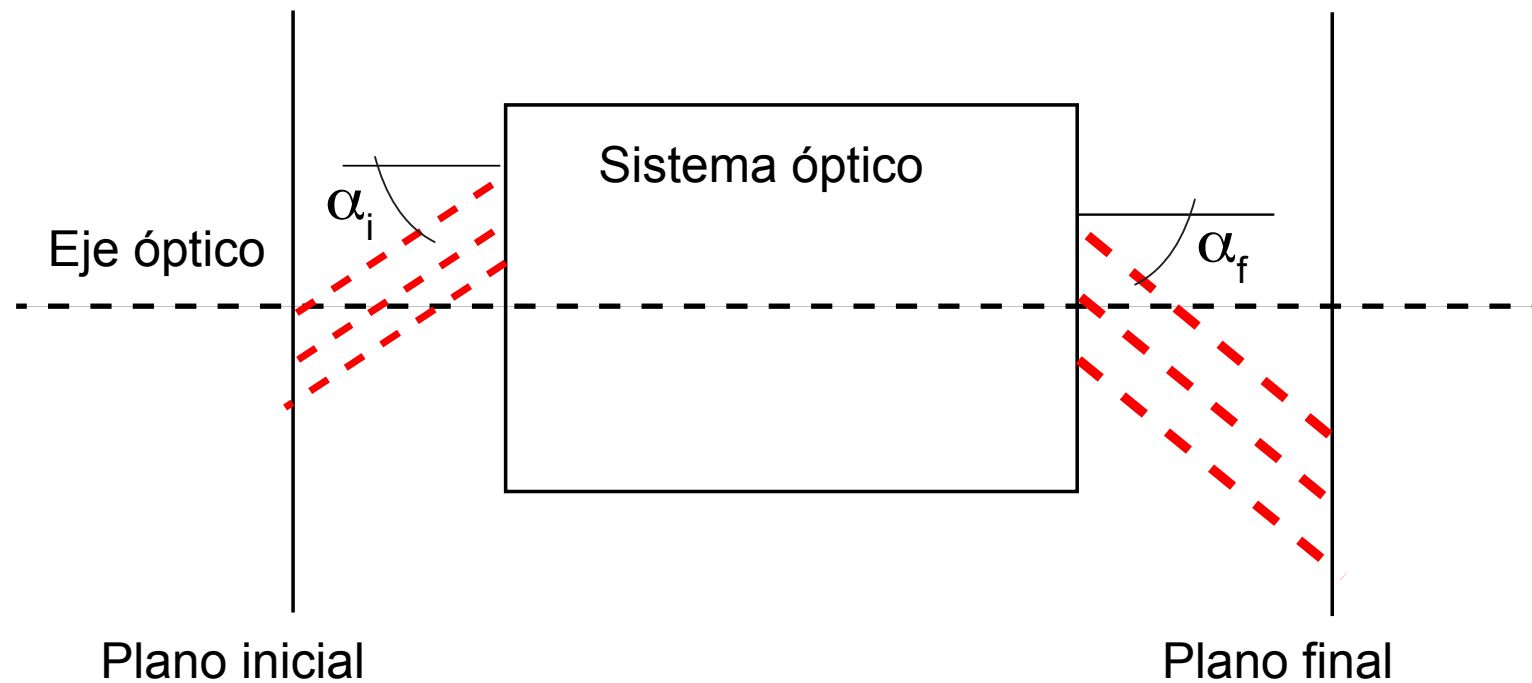
Si $A=0$, el plano final es el segundo plano focal



Si $B=0$, A es la magnificación transversal $x_f = Ax_i$. Los planos de entrada y salida son los planos conjugados



Si $C=0$, D es la magnificación angular $\alpha_f = D\alpha_i$ independiente de x_i .
Este es un sistema telescópico. Rayos paralelos entran y rayos paralelos salen.



El determinante

La matriz ABCD es una transformación canónica lineal.

Si el inicio y el fin es el mismo el determinante debe ser 1

$$\mathbf{det}[M] = AD - BC = \frac{n_1}{n_2}$$

Valores característicos de la matriz

Si M es la matriz ABCD y v es un vector de un rayo:

$$[M - \lambda I]v = \begin{bmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{bmatrix} v = \mathbf{0}$$

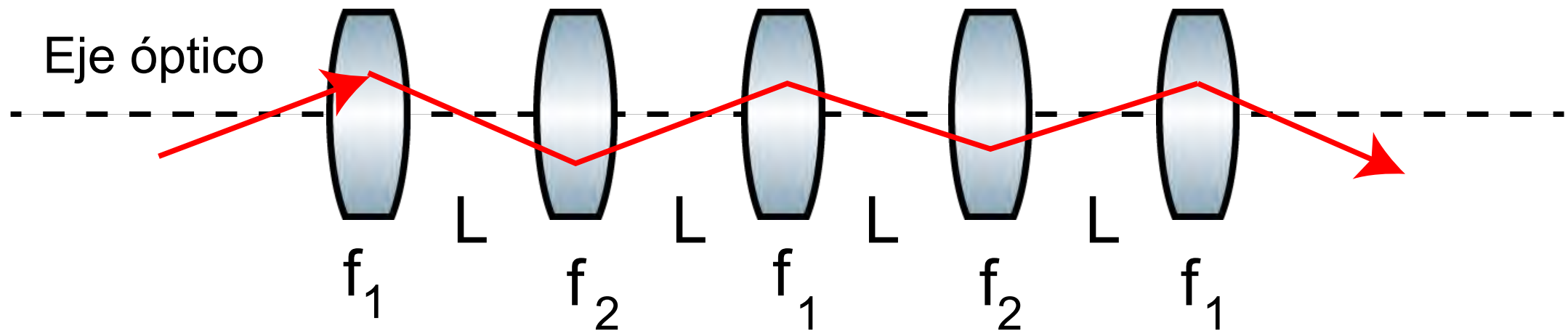
$$\det \begin{bmatrix} A - \lambda & B \\ C & D - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (A + D)\lambda + 1 = 0$$

el uno es debido al $\det[M]$

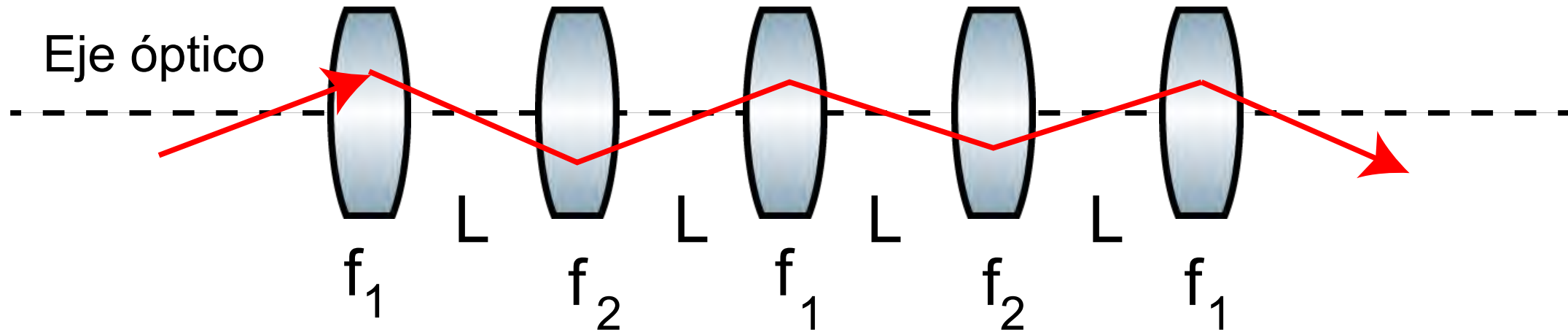
$$\text{si } m = \frac{(A + D)}{2} \quad \lambda_1, \lambda_2 = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$$

pero como el producto de los valores característicos es el determinante y este debe ser 1; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ o $\lambda_1 = e^{i\theta}$ $\lambda_2 = e^{-i\theta}$

Las matrices ABCD se pueden utilizar para estudiar la estabilidad óptica de un arreglo. Por ejemplo, un Fabry-Perot, el cual se puede estudiar como una serie de lentes con distancia focal f_1 y f_2 asociadas a la curvatura de los espejos. Que pasa con la separación entre los espejos L .



N lentes quiere decir que el rayo da N vueltas en el interior del Fabry-Perot, y el coeficiente de transmisión del espejo de salida T es $1/N$. Los respectivos radios de curvatura de los espejos son $R_1=2f_1$ y $R_2=2f_2$



component version three **library**
by alexander franzen 2k+6

Queremos que el rayo regrese al mismo recorrido después de pasar por 4 lentes (2 si $f_1=f_2$), eso define la celda del sistema caracterizada por la matriz M,

$$v_n = [M]^n v_0$$

Si lo que queremos es estabilidad entonces las iteraciones deben regresar los rayos al mismo punto.

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1; \quad -1 \leq m \leq 1; \quad m^2 = \left(\frac{A + D}{2} \right)^2 \leq 1$$

$$m = \frac{(A + D)}{2} = \cos \theta$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = m \pm i\sqrt{1 - m^2} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$v_n = [M]^n v_0$$

Los vectores característicos asociados a esos valores característicos son v_1 y v_2 entonces el resultado de sacar la n potencia de la matriz M es con posibles coeficientes reales c_1 y c_2 :

$$v_n = c_1 v_1 e^{-in\theta} + c_2 v_2 e^{in\theta}$$

que es estable siempre que $m^2 > 1$

porque si no: $\lambda_1, \lambda_2 = e^{\pm\theta}$

¿Qué pasa si el haz de rayos es una onda esférica?

Consideremos una fuente puntual, ubicada en el eje z. Los frentes de onda producidos por una fuente puntual de este tipo son esféricos y se pueden caracterizar por su radio de curvatura R.

¿Cómo son transformados por un sistema óptico general?

Consideremos el rayo definido por la normal a los frentes de onda. Tenemos que $R \sin \theta = x$, que en la aproximación paraxial es $R_i = x_i / \theta_i$. Después del sistema óptico, se puede calcular x_f y θ_f usando la matriz de transferencia de rayos, y luego el nuevo radio de curvatura para los frentes de onda viene dado por $R_f = x_f / \theta_f$:

$$R_f = \frac{AR + B}{CR + D} \quad \text{en propagación libre } L: \quad R_f = R_i + L$$

Difracción:

Kirchhoff encontró la forma de llegar de las ecuaciones de Maxwell a las de Fresnel y de Fraunhofer.

De la ecuación de onda escalar en el vacío asumir una envolvente y la relación lineal de dispersión para obtener la ecuación de Kirchhoff

$$[\nabla^2 + k^2] E = 0.$$

Asumir una envolvente que cambia poco en la dirección de propagación.

$$E(x, y, z) = U(x, y, z)e^{-ikz}$$

$$E(x, y, z) = U(x, y, z)e^{-ikz}$$

Que da la ecuación paraxial:

$$e^{ikz} \left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - 2ik\partial_z - k^2 + k^2 \right] U = 0,$$
$$\Rightarrow \nabla_{\perp}^2 U \approx 2ik\partial_z U.$$

Luego comparar el termino transversal con el término en z (dirección de propagación) eso lleva a comparar el área de la apertura transversal A con λL donde λ es la longitud de onda asociada con magnitud del vector de onda $k=2\pi/\lambda$ y L la distancia de propagación longitudinal

Si queremos una cintura muy pequeña el área del lente debe ser grande por los efectos de difracción.

¿Por qué el láser cw es una Gaussiana?

¿Cuál es el radio de curvatura en el foco?

¿Dónde es el radio de curvatura mínimo?

Fraunhofer:

Cuando z va a infinito $\lambda L \gg A$, el resultado es la transformada de Fourier de la apertura. Por eso la TF de la apertura aparece en el foco de un lente pues este trae la imagen del infinito al foco.

Fresnel:

Cuando z está muy cerca de la apertura $\lambda L \ll 1$, A entonces poco pasa, pues todavía no hay interferencia.

Para utilizar las matrices de ABCD en la propagación de haces laser caracterizado por un radio de curvatura $R(z)$ y una cintura $w(z)$:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right],$$

$$\text{and } w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2},$$

$$\text{where } w_0 = w(0) = \sqrt{2z_R/k}$$

$$z_R = \pi \times \frac{w_0^2}{\lambda}.$$

determina el mínimo radio en el punto más enfocado del haz

El radio de curvatura complejo es

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - 2i \frac{1}{k\omega^2},$$

$$q = (z - z_0) + iz_R.$$

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D},$$

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + D/q_1}{A + B/q_1}.$$

Polarización

Polarización:

Dirección del vector del campo eléctrico. Puede ser en 3 dimensiones, recordar la ley de Gauss en casos de un haz muy enfocado.

Bases:

Lineal: Vertical y Horizontal

Circular: Derecha e Izquierda; puede ser de hélice o de bicicleta dependiendo de que tan grande es el gradiente transversal del campo

¿Qué es un haz no polarizado?

Vectores de Jones en la base $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrices de Jones para los instrumentos de control de la polarización.

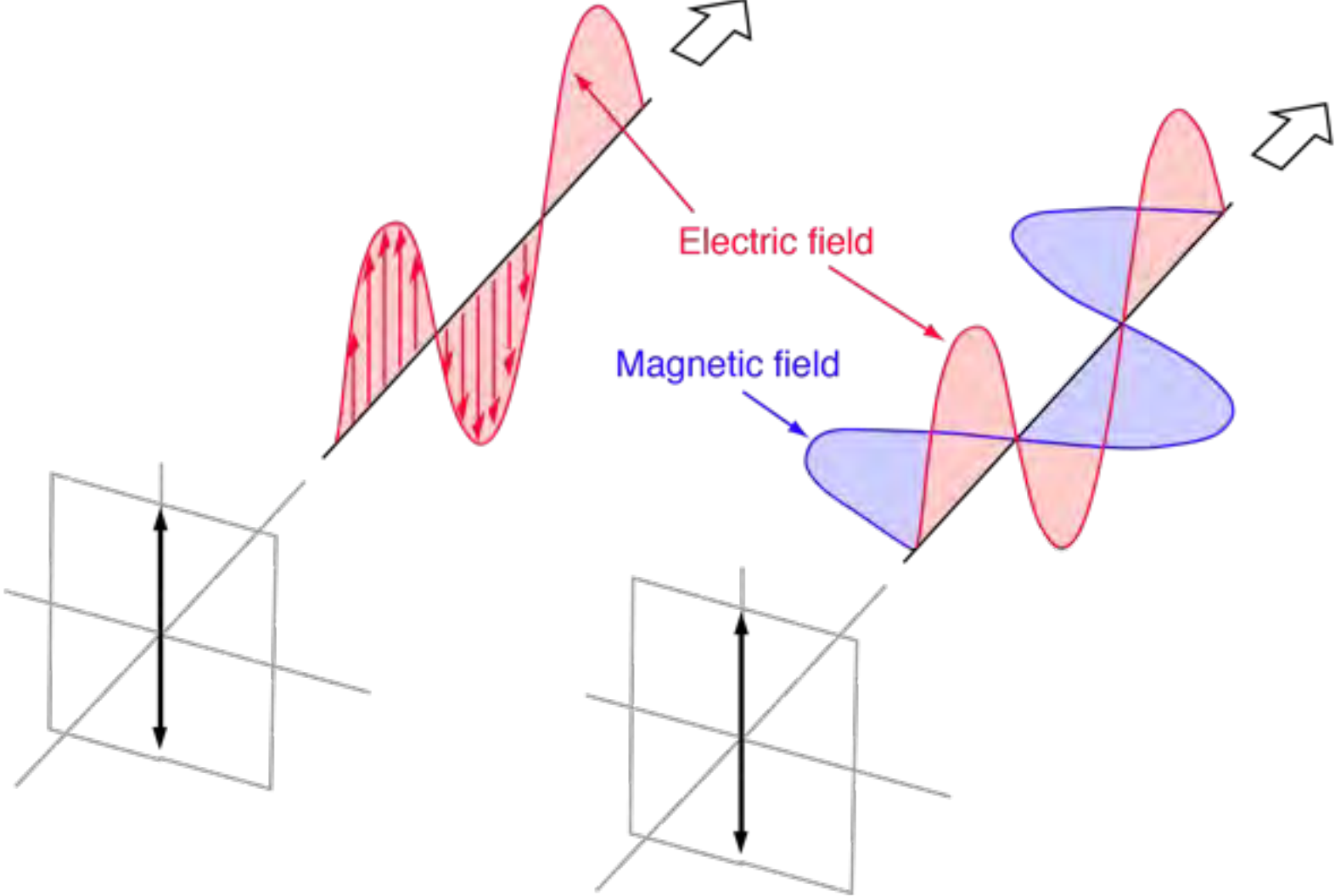
Por ejemplo, un polarizador horizontal es representado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vectores de Jones en la circular $\pm \sigma_{\pm} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] / \sqrt{2}$

una buena forma de identificar el sentido es con la proyección del vector de polarización y el de propagación de la onda: la helicidad.

Polarización Vertical



Polarización circular:

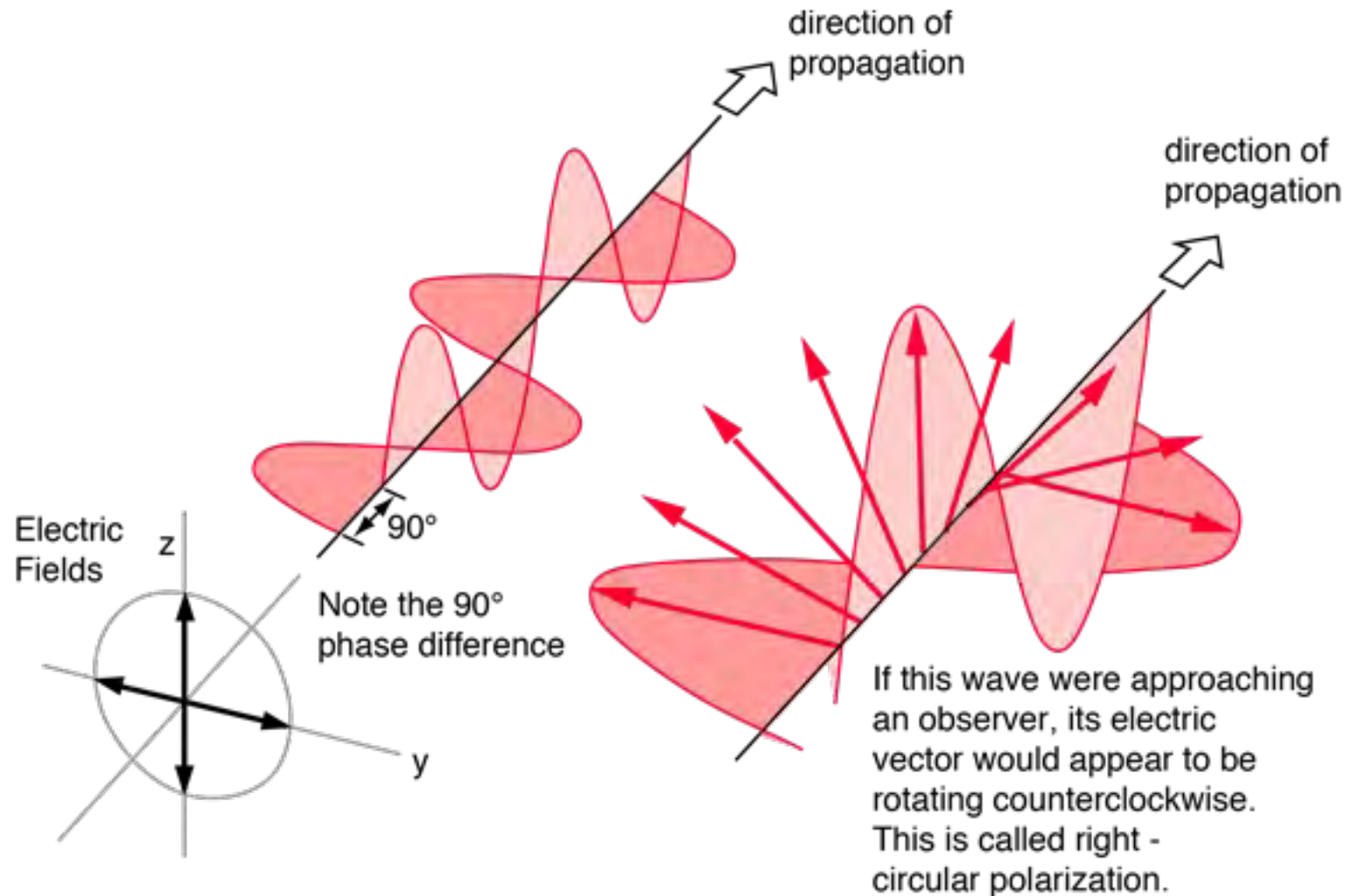
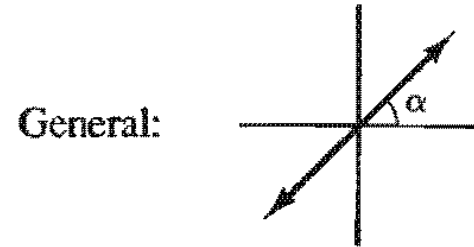


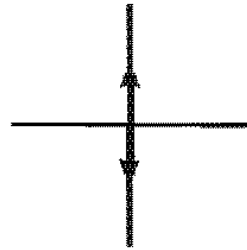
TABLE 14-1 SUMMARY OF JONES VECTORS $E_0 = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ E_{0y}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix}$

I. Linear Polarization ($\Delta\varphi = m\pi$)

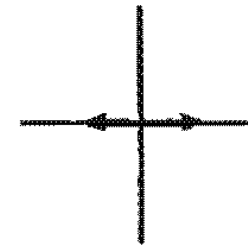


$$E_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

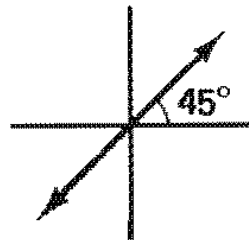
Vertical: $E_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



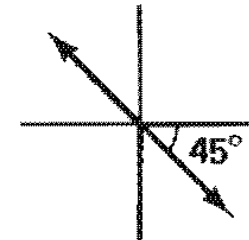
Horizontal: $E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



At $+45^\circ$: $E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

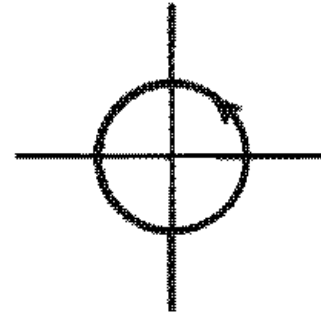


At -45° : $E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



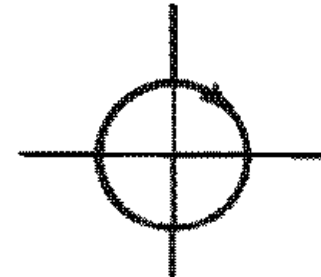
II. Circular Polarization ($\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$)

Left:



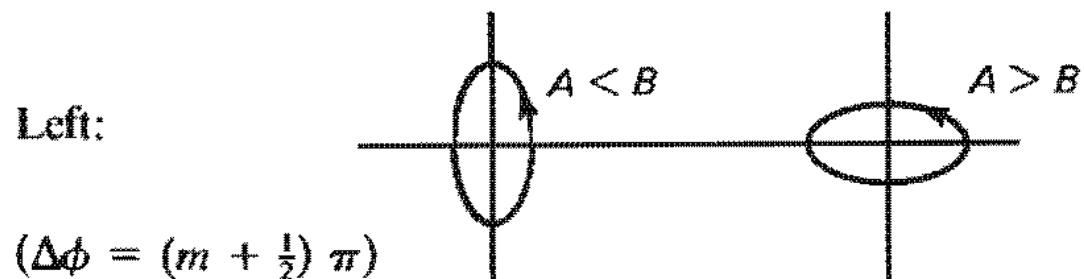
$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Right:

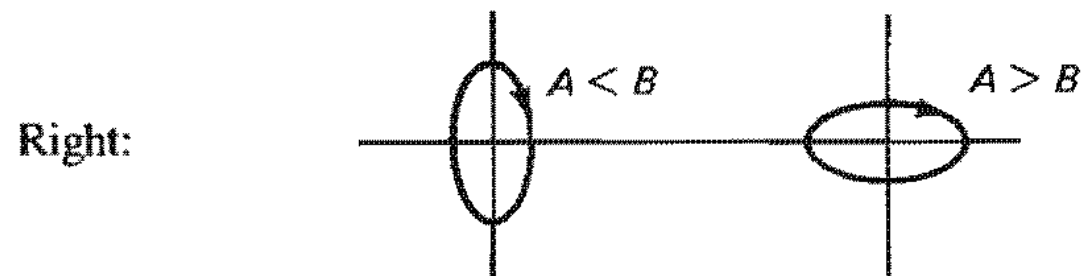


$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

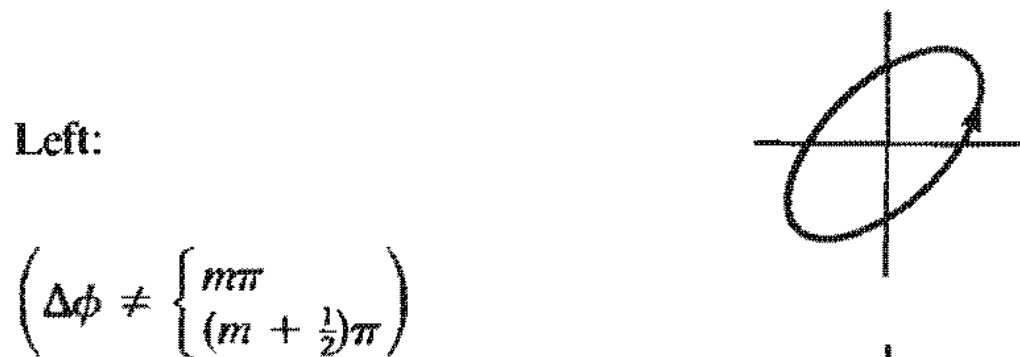
III. Elliptical Polarization



$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ iB \end{bmatrix}$$



$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \begin{bmatrix} A \\ -iB \end{bmatrix}$$

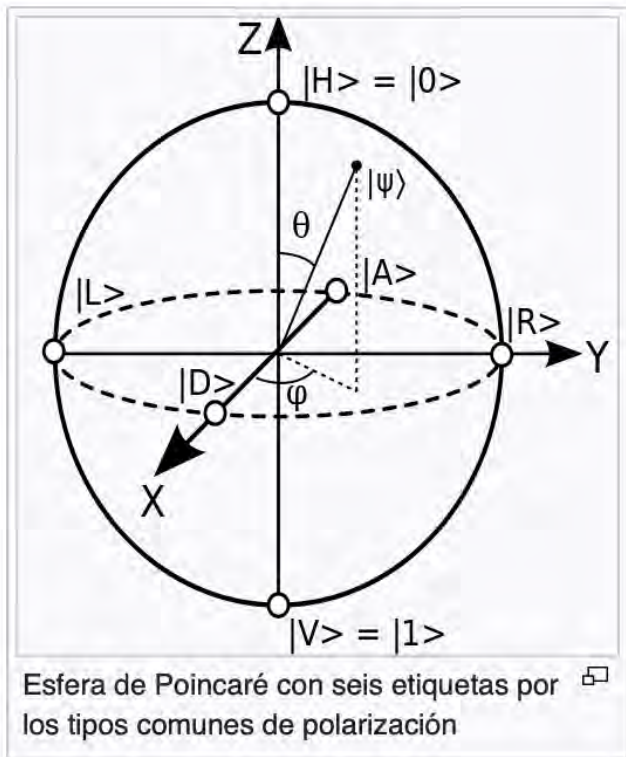


$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B + iC \end{bmatrix}$$



$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B - iC \end{bmatrix}$$

Polarización	Vector de Jones correspondiente	Notación típica ket
Polarización lineal en la dirección x, llamada típicamente 'Horizontal'.	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$ H\rangle$
Polarización lineal en la dirección y, llamada típicamente 'Vertical'.	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$ V\rangle$
Polarización lineal a 45° desde el eje x, llamada típicamente 'Diagonal' L+45.	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$ D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (H\rangle + V\rangle)$
Polarización lineal a -45° desde el eje x, llamada típicamente 'Anti-Diagonal' L-45.	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$ A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (H\rangle - V\rangle)$
Polarización circular dextrógira, llamada típicamente PCD.	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	$ R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (H\rangle - i V\rangle)$
Polarización circular levógira, llamada típicamente PCL.	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	$ L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (H\rangle + i V\rangle)$



Elemento óptico	Matriz de Jones correspondiente
Polarizador Lineal con eje de transmisión horizontal	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polarizador Lineal con eje de transmisión vertical	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador Lineal con eje de transmisión a 45° respecto a la horizontal	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador Lineal con eje de transmisión a -45° respecto a la horizontal	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador Circular Derecho	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador Circular Izquierdo	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
<p>Polarizador lineal con el eje de transmisión en ángulo del θ con la horizontal. (Construcción que se muestra en rotación desde la horizontal en el elemento de polarización, el elemento de polarización, y luego girando hacia abajo por la horizontal.)</p>	$\begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\theta) & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Retardadores de Fase	Matriz de Jones correspondiente
lámina de cuarto de onda con eje vertical rápido	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
lámina de cuarto de onda con eje horizontal rápido	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
lámina de media onda con eje rápido por el ángulo θ w.r.t el eje horizontal ¹	$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

Todo lo que saben de la esfera de Bloch se aplica solo que aquí se llama generalmente la esfera de Poincaré.

Para tratar el caso de la luz no polarizada, Stokes desarrollo sus 4 parámetros y ellos permiten caracterizar haces no completamente polarizados. Hay una formulación matricial de los elementos.

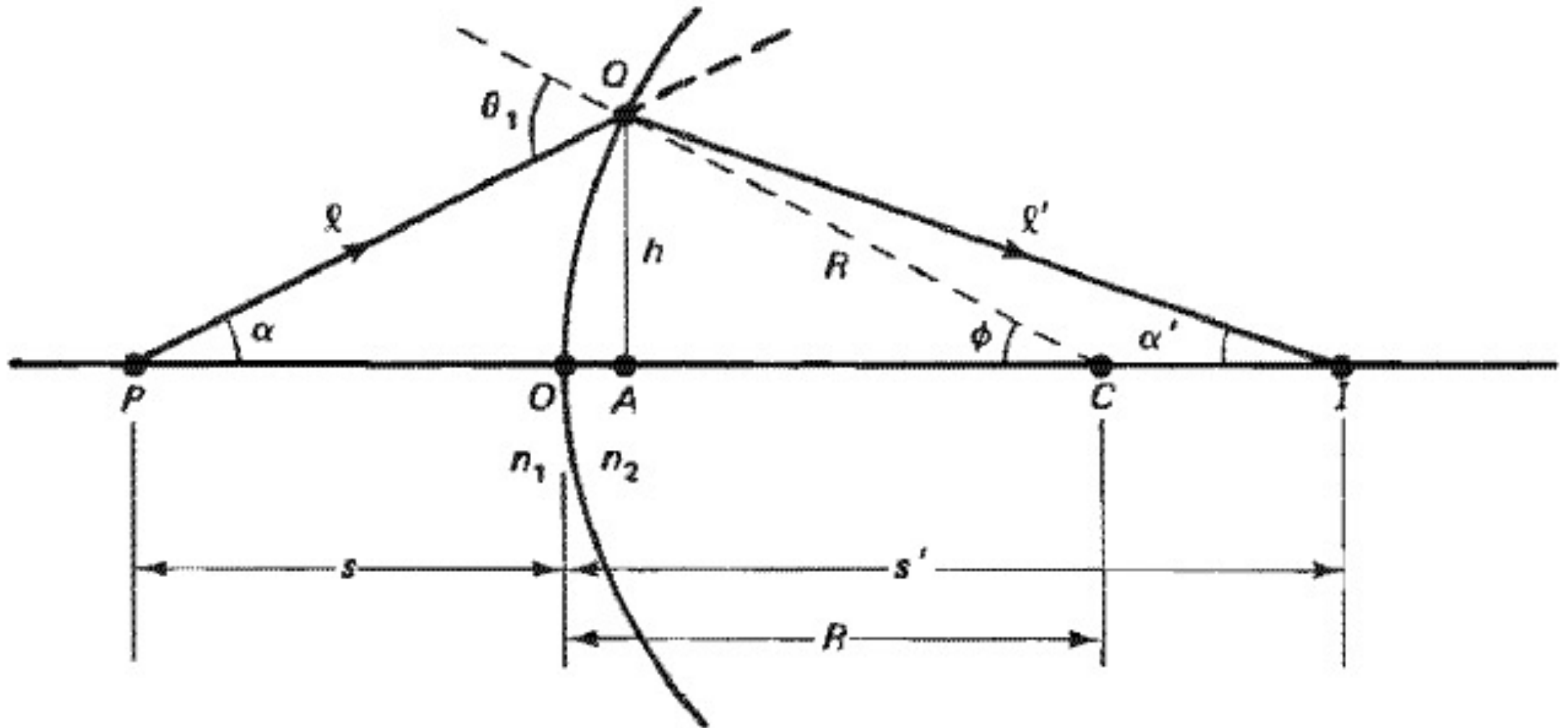
Es muy importante en la teoría de coherencia pues si el haz no está bien polarizado, la interferencia no puede ser completa.

Aberraciones

Mas allá del ángulo pequeño

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$



la diferencia de camino óptico por el eje y fuera del eje:

$$a(Q) = (n_1 \ell + n_2 \ell') - (n_1 s + n_2 s')$$

$$e = s \left\{ 1 + \left[\frac{h^2(R + s)}{Rs^2} - \frac{h^4(R + s)}{12R^3s^2} \right] \right\}^{1/2}$$

$$e' = s' \left\{ 1 + \left[\frac{h^2(R - s')}{Rs'^2} - \frac{h^4(R - s')}{12R^3s'^2} \right] \right\}^{1/2}$$

$$a(Q) = \frac{h^2}{2} \left[\left(\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} \right) - \left(\frac{n_2 - n_1}{R} \right) \right] - \frac{h^4}{8} \left[\frac{n_1}{s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{n_2}{s'} \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right)^2 \right]$$

Aberraciones:

$$a(Q) = {}_0C_{40}r^4 + {}_1C_{31}h'r^3 \cos \theta + {}_2C_{22}h'^2r^2 \cos^2 \theta \\ + {}_2C_{20}h'^2r^2 + {}_3C_{11}h'^3r \cos \theta$$

r^4 spherical aberration

$h'r^3 \cos \theta$ coma

$h'^2r^2 \cos^2 \theta$ astigmatism

h'^2r^2 curvature of field

$h'^3r \cos \theta$ distortion

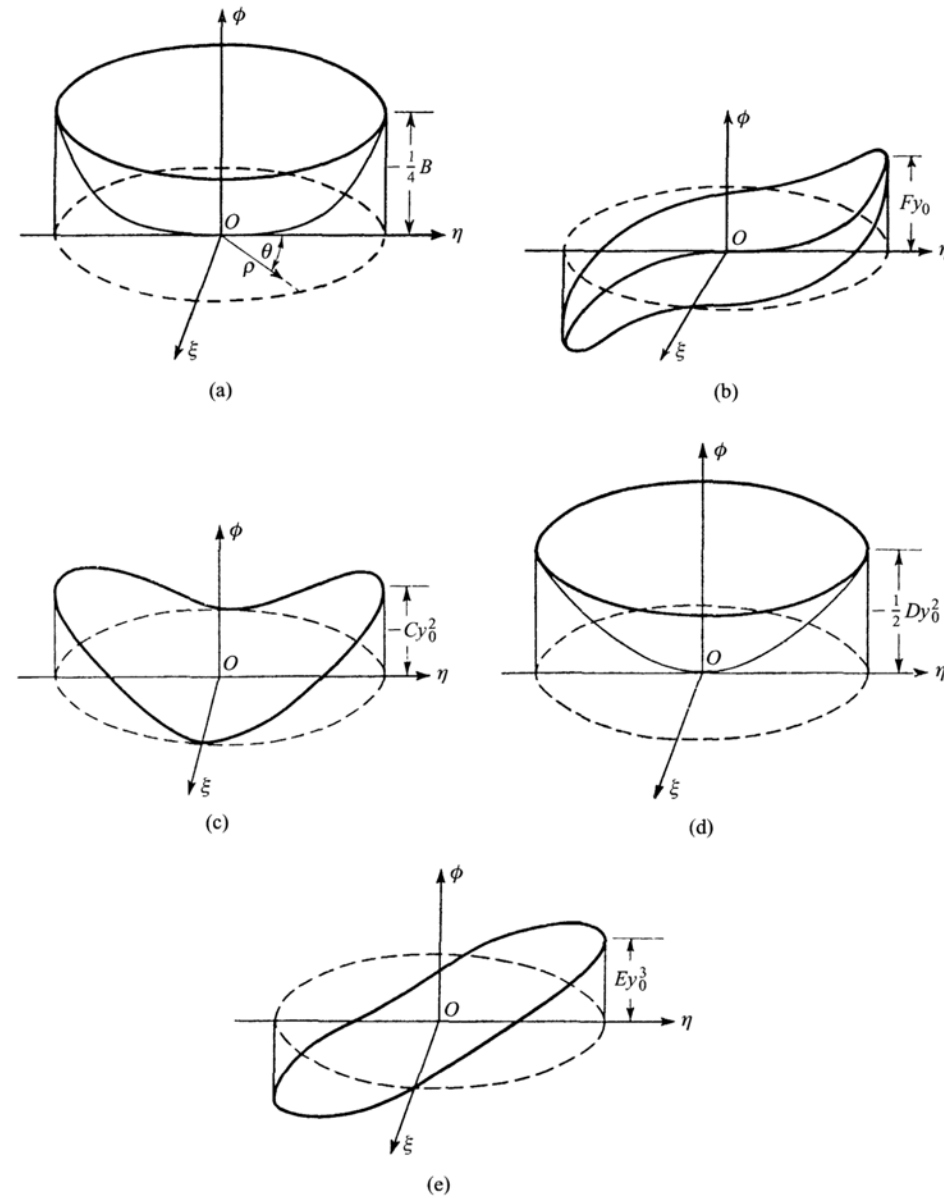
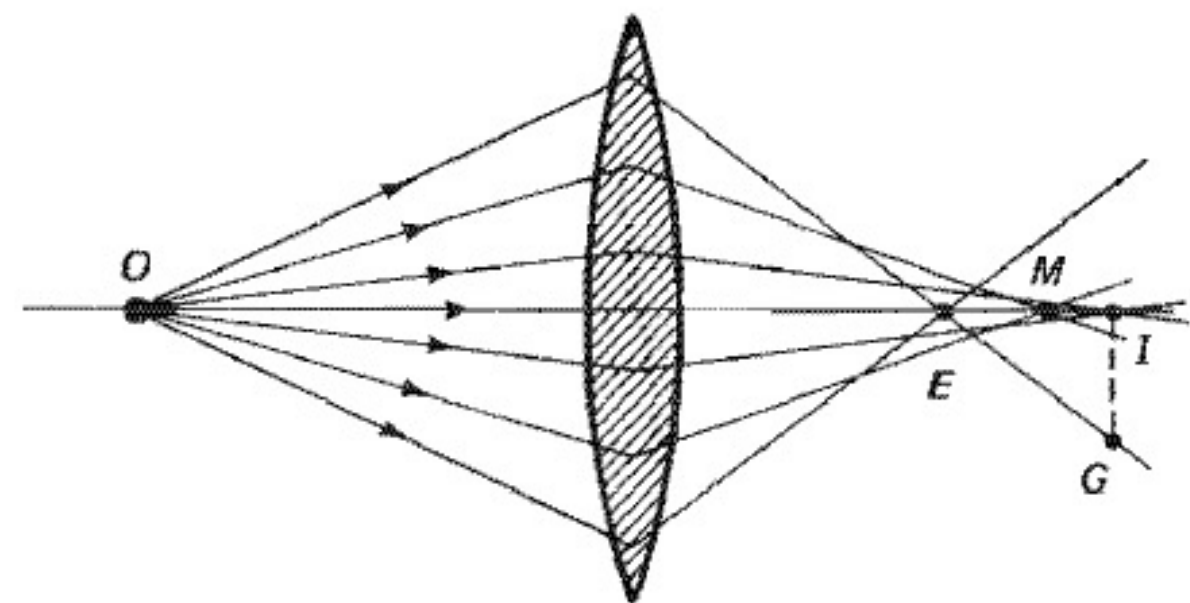
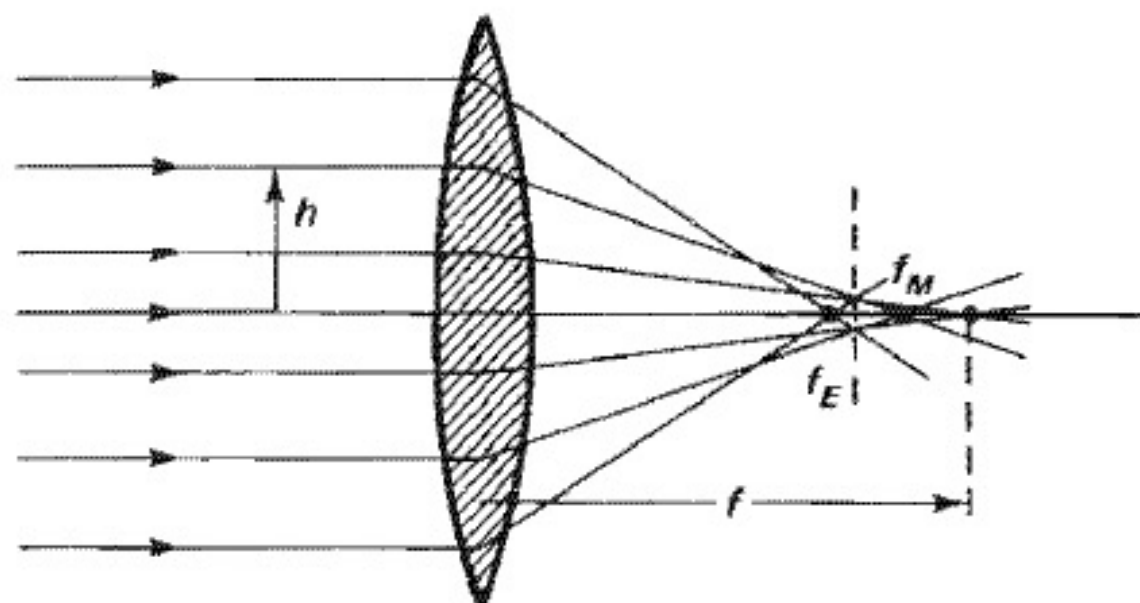


Fig. 5.3 The primary wave aberrations: (a) spherical aberration $\phi = -\frac{1}{4}B\rho^4$; (b) coma $\phi = Fy_0\rho^3 \cos \theta$; (c) astigmatism $\phi = -Cy_0^2\rho^2 \cos^2 \theta$; (d) curvature of field $\phi = -\frac{1}{2}Dy_0^2\rho^2$; (e) distortion $\phi = Ey_0^3\rho \cos \theta$.



(a)



(b)

Figure 5-6 Spherical aberration of a lens, producing in (a) different image distances and in (b) different focal lengths, depending on the lens aperture.

Para minimizar las aberraciones utilicen ángulos muy pequeños del rayo en la superficie. Es mejor dos pequeños que uno grande.

Eso explica por qué un lente doble tiene mucho menos aberraciones que uno sencillo además puede corregir la aberración cromática.

Usando aperturas se mejora, pero se pierde luz.

Estudien las aberraciones con los polinomios de Zernike.

An objective lens for efficient fluorescence detection of single atoms

Wolfgang Alt

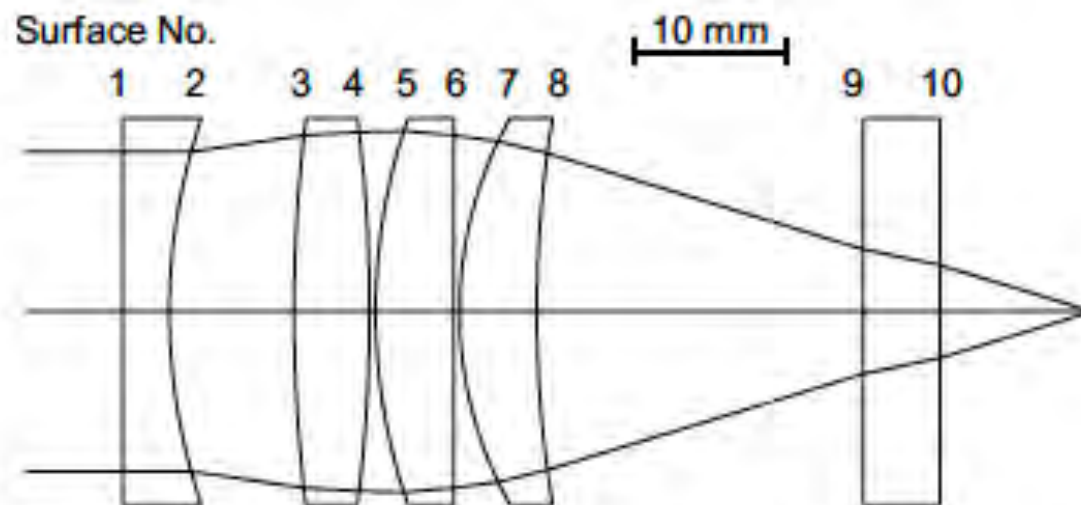
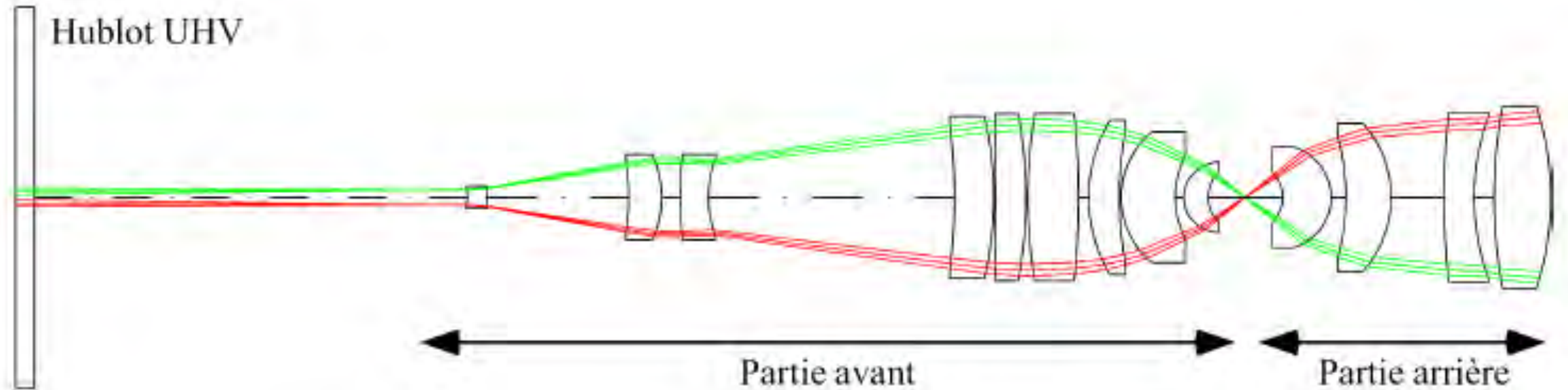


Fig. 2. Layout of the lens system. Surfaces 1 to 8 represent the objective itself, surfaces 9 to 10 represent the silica wall of the vacuum cell. The MOT is at the position of the focus on the right.

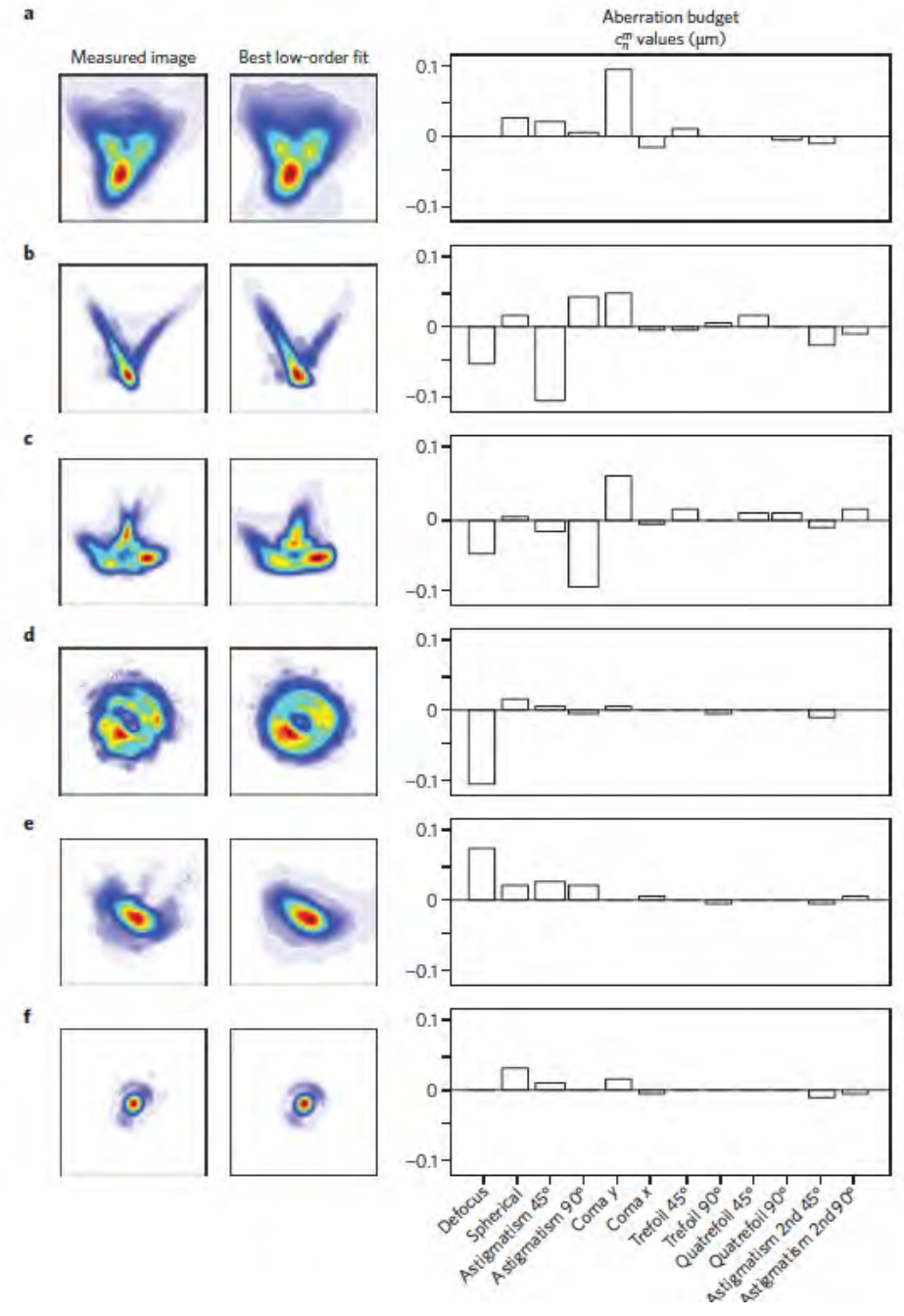
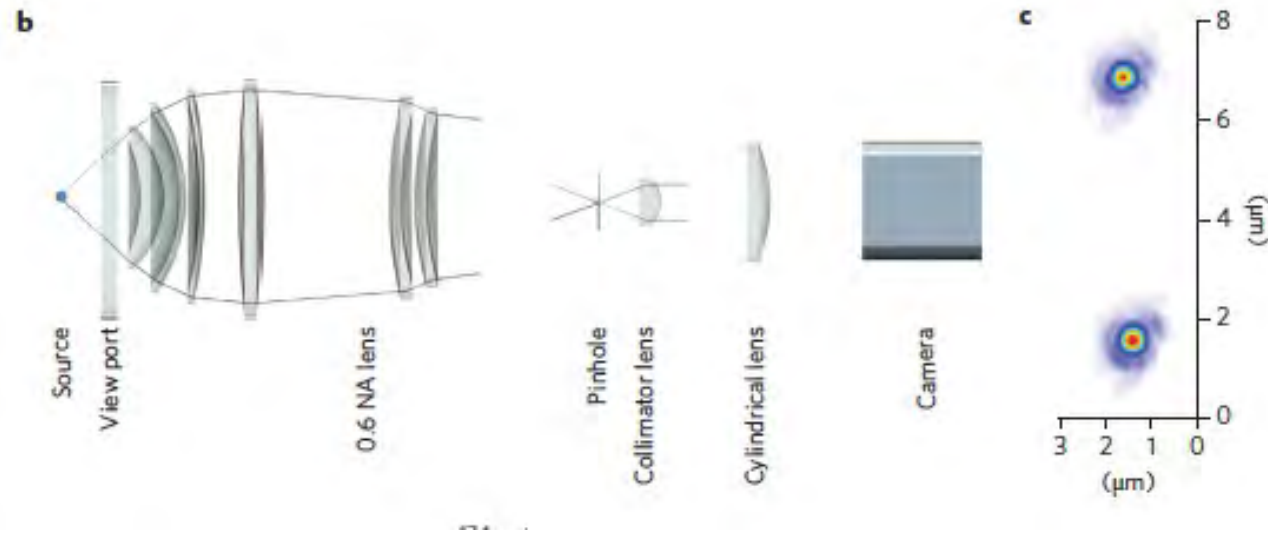
The objective is designed using the program Oslo LT [4]. It traces a parallel input beam of fixed diameter through the lens elements and the 5 mm silica window.

Objetivo (Institute d'Optique, 2001) para formar una trampa dipolar para un átomo, tesis doctoral Nicholas Schloser.



High-resolution adaptive imaging of a single atom

J. D. Wong-Campos*, K. G. Johnson, B. Neyenhuis, J. Mizrahi and C. Monroe



Referencias:

M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Cambridge University Press .

F. Pedrotti, L. Pedrotti and L. Pedrotti, Introduction to Optics, Cambridge University Press.

Resumen de Optica Paraxial

<https://nmr.physics.ox.ac.uk/oxonly/C2/optics-lectures-2011.pdf>

Teich and Saleh, Fundamentals of Photonics.

Gracias